Subject . Year. Month. Day.

« هو العلیم »

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشکده و آموزشکده فنی مشهد

نام درس :

کنترل دیجیتال

نام استاد :

مهندس مجید شرگاه

نوشته شده توسط :

غلامحسین مغزی

مهرماه ۱۳۹۱

« هوالعلیم »

« کنترل دیجیتال »

تبدیل Z :

$$x(z) = \mathcal{Z}[x(t)] \to Z[x(kT)] \to Z[x(k)]$$

این برای متغیر زمانی است — برای شمارش استفاده می‌شود

البته فراموش نشود که این مقادیر به ترتیب است و در حالت $x(t)$ زمانی است ولی پیوسته نیست، بلکه نمونه‌گیری ما از سیگنال گسسته است.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k} \to \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\, z^{-k}$$

z یک عدد مختلط است

* مصرف‌کننده‌های انرژی
  - Passive : سیستم‌های غیرفعال که به مرور انرژی آن تخلیه می‌شود و در انتها به صفر می‌رسد.
  - Active : سیستم‌های فعال که در این سیستم‌ها دامنه انرژی به ∞ میل می‌کند و به عبارتی تولیدکننده انرژی می‌باشد.

* شعاع همگرایی ← $|z| < R$ در این صورت سری فوق همگراست

* قطب‌ها و صفرها :

$$x(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \to \frac{b_0 (z-z_1)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)\cdots(z-p_n)}$$

z_i (صفرها) ، p_i (قطب‌ها)

مثال : تبدیل Z توابع ذیل را محاسبه کنید :

1) $x(t) = \begin{cases} 1(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$x(z) = \mathcal{Z}[1(t)] \to \sum_{k=0}^{\infty} 1 z^{-k} \to 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-k} \to \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

شعاع همگرایی $|z| > 1$

۲) $x(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ $\quad X(z) = Z[t] \to \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k} \to \sum_{k=0}^{\infty} kT z^{-k} \to$

$$T \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} \to T \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

۳) $x(k) = \begin{cases} a^k & t \geq 0 \quad (k \geq 0) \\ 0 & t < 0 \quad (k < 0) \end{cases}$ $\quad X(z) = Z[a^k] \to \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \to 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a z^{-1})^k \to \frac{1}{1-a z^{-1}} = \frac{az}{az-1}$$

۴) $x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ $\quad X(z) = Z[e^{-at}] \to \sum_{k=0}^{\infty} a^{-akT} z^{-k} \to \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-aT} z^{-1})^k$

$$\frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

۵) $x(t) = \begin{cases} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ $\quad X(z) = Z[\sin \omega t] \to Z\left[\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}\right)\right] \to$

(Sinusoidal)

$$\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}}\right) \to \frac{1}{2j} \frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})\, z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})\, z^{-1} + z^{-2}} \to$$

$$\frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2 z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} \to \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 z \cos \omega T + 1}$$

* جدول تبدیل لاپلاس وتبدیل Z :

سیگنال زمان	تبدیل Z	تبدیل لاپلاس
$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	1	—

(Dirichlet) تابع گسسته

سیگنال زمان	تبدیل Z	تبدیل لاپلاس
$u(t) \rightarrow 1(t)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\dfrac{1}{s}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$	$\dfrac{1}{s+a}$
$t1(t)$	$\dfrac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\dfrac{1}{s^2}$
$t^2 1(t)$	$\dfrac{T^2 z^{-1}(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\dfrac{2}{s^3}$
$t^3 1(t)$	$\dfrac{T^3 z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^3}$	$\dfrac{6}{s^4}$
$1-e^{-at}$	$\dfrac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$
$e^{-at}-e^{-bt}$	$\dfrac{e^{-aT}-e^{-bT}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$	$\dfrac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
te^{-at}	$\dfrac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
$(1-at)e^{-at}$	$\dfrac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$	$\dfrac{s}{(s+a)^2}$
$t^2 e^{-at}$	$\dfrac{T^2 e^{-at}(1+e^{-aT}z^{-1})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^3}$	$\dfrac{s}{(s+a)^3}$
$at-1+e^{-at}$	$\dfrac{((aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}z^{-1}-aTe^{-aT})z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$	$\dfrac{a^2}{s^2(s+a)}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{z^{-1}\sin\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

* خواص تبدیل Z :

$$x(k) = a f(k) + b g(k) \longrightarrow X(Z) = a F(Z) + b G(Z)$$

۱) خطی بودن:

با فرض: $F(Z) = \mathcal{Z}[f(k)]$ ، $G(z) = \mathcal{Z}[g(z)]$

۲) ضرب در a^n یا مقیاس‌سازی:

$$\mathcal{Z}[a^k x[k]] = X(a^{-1}z) \longrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)$$

۳) شیفت زمانی:

$$\mathcal{Z}[x(t-nT)] = Z^{-n} X(Z)$$

$$\mathcal{Z}[x(t+nT)] = Z^{n}\left(X(Z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) Z^{-k}\right)$$

Backword Difference

* اختلاف یا تفاضل پس‌رو:

$$\nabla x(k) = x(k) - x(k-1)$$

$$\mathcal{Z}[\nabla x(k)] \longrightarrow \mathcal{Z}[x(k) - x(k-1)] \longrightarrow X(Z) - Z^{-1}X(Z) \longrightarrow (1-Z^{-1})X(Z)$$

$$\nabla^2 x(k) = \nabla[\nabla x(k)] \longrightarrow \nabla(x(k) - x(k-1)) \longrightarrow x(k) - x(k-1) - x(k-1) + x(k-2)$$

$$\mathcal{Z}[\nabla^2 x(k)] \longrightarrow X(Z) - 2Z^{-1}X(Z) + Z^{-2}X(Z) \longrightarrow X(Z)(1-2Z^{-1}+Z^{-2}) \longrightarrow X(Z)(1-Z^{-1})^2$$

به همین ترتیب خواهیم داشت $\longrightarrow \mathcal{Z}[\nabla^m x(k)] = (1-Z^{-1})^m X(Z)$

Forword Difference

* اختلاف یا تفاضل پیش‌رو:

$$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$$

$$\mathcal{Z}[\Delta x(k)] \longrightarrow \mathcal{Z}[x(k+1)] - \mathcal{Z}[x(k)] \longrightarrow ZX(Z) - Zx(0) - X(Z) \longrightarrow X(Z)(Z-1) - Zx(0)$$

وضعیت مشخص نیست

$\Delta^2 x(k) = \Delta[\Delta x(k)] \longrightarrow \Delta[x(k+1)-x(k)] \longrightarrow x(k+2)-x(k+1)-x(k+1)+x(k) \longrightarrow$

$x(k+2)-2x(k+1)+x(k)$

$Z[\Delta^2 x(k)] \longrightarrow z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) - 2(zX(z) - zx(0)) + X(z)) \longrightarrow$

$(z-1)^2 X(z) - z(z-1)x(0) - z\Delta x(0)$ که در این معادله $\Delta x(0) = x(1) - x(0)$

به همین ترتیب خواهیم داشت $\longrightarrow Z[\Delta^m x(k)] = (z-1)^m X(z) - z\sum_{j=0}^{m-1} (z-1)^{m-j-1}\Delta^j x(0)$

* قضیه جابجائی مختلط تبدیل سیگنال $e^{-at}x(t)$ برحسب تبدیل Z از $x(t)$:

Complex traslation theorem

$$Z[e^{-at}x(t)] \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}e^{-akT} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(ze^{aT})^{-k} \longrightarrow X(ze^{aT})$$

برای نمونه داریم:

$$Z(\sin\omega t) \longrightarrow \frac{z^{-1}\sin\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T + z^{-2}}$$

$$Z(e^{-at}\sin\omega t) \longrightarrow \frac{e^{-aT}z^{-1}\sin\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$$

* قضیه مقدار اولیه:

اگر تبدیل Z برای $x(t)$ بصورت $X(z)$ وجود داشته باشد $Z[x(t)] = X(z)$ و حد $\lim_{z\to\infty} X(z)$ وجود داشته باشد؛ آنگاه

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$$

اثبات:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \longrightarrow x(0) + x(1)z^{-1} + \cdots \longrightarrow \lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$$

برای نمونه داریم:

$$X(z) = \frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})} \longrightarrow x(0) = \lim_{z\to\infty} \frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})} = 0$$

(این تابع تبدیل $x(t) = 1-e^{-t}$ با پریود نمونه برداری T است ودر $t=0$ مقدارش صفر است)

Final Value theorem

* قضیه مقدار نهایی:

با فرض صفر بودن $x(k)$ برای $k<0$ و پایداری $X(z)$ (قطبها درون دایره واحد باشند)

در این صورت

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1} \left((1-z^{-1})X(z)\right)$$

اثبات:

$$Z[x(k)] \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \quad : \quad Z[x(k-1)] \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1) z^{-k}$$

$$\lim_{z\to 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1) z^{-k} \right) \longrightarrow \lim_{z\to 1} \left(X(z) - z^{-1}X(z)\right) \longrightarrow \lim_{z\to 1} \left((1-z^{-1})X(z)\right)$$

* اما در سمت چپ چنین است که داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k)-x(k-1) \longrightarrow x(0)-x(-1)+x(-1)+x(0)+x(2)-x(1)+\cdots \longrightarrow x(\infty) = \lim_{k\to\infty} x(k)$$

برای نمونه داریم:

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} \longrightarrow x(\infty) = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})X(z) \longrightarrow 1-0=1$$

(- اما اصل سیگنال در حوزه زمان این بوده است که داریم:

$$x(t) = 1-e^{-at} \longrightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 1$$

مثال: برای تابع داده شده موجود مقادیر اولیه و مقدار نهایی را محاسبه کنید:

$$x(k) - a\,x(k-1) = 1(k) \quad \begin{cases} x(k)=0 & k<0 \\ |a|<1 \end{cases}$$

* در ابتدا از طرفین تبدیل Z می‌گیریم:

$$* \; X(z) - a z^{-1} X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \longrightarrow X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-az^{-1}} \longrightarrow$$

$$X(z) = \frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-az^{-1}}\right) \longrightarrow Z \text{ عکس تبدیل } \longrightarrow x(k) = \frac{1}{1-a}(1-a^{k+1})$$

$$x(k) \begin{cases} x(0) = \lim\limits_{z\to\infty} X(z) \longrightarrow x(0) = 1 \\ x(\infty) = \lim\limits_{z\to 1} (1-z^{-1})X(z) \longrightarrow x(\infty) = \frac{1}{1-a} \end{cases}$$

نکته: فراموش نشود برای محاسبه مقدار نهایی کافیست تابع $X(z)$ را در $(1-z^{-1})$ ضرب کرده و سپس حد آن را که $(z\to 1)$ بدست آوریم:

* کانولوشن در حوزهٔ حقیقی:

1) $x_1(t), x_2(t) = 0$ for $t<0$; 2) $Z[x_1(t)]$, $Z[x_2(t)]$ (وجود داشته باشد)

در اینصورت داریم:

$$X_1(z)\cdot X_2(z) = Z\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)\,x_2(kT-hT)\right]$$

اثبات:

* $$Z\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)\,x_2(kT-hT)\right] \to \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)\,x_2(kT-hT)\,z^{-1} \to$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)\,x_2(kT-hT)\,z^{-k} \to m=k-h \to Z\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)\,x_2(kT-hT)\right] \to$$

(این تابع برای $h<k$ صفر باشد)

$$\sum_{h=0}^{\infty} x_1(hT)\,z^{-h}\sum_{m=-h}^{\infty} x_2(mT)\,z^{-m} \to \text{for } m<0 \to x_2(mT)=0 \to$$

$$Z\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(kT)\,x_2(kT-hT)\right] \to \sum_{h=0}^{\infty} x_1(hT)\,z^{-h}\sum_{m=0}^{\infty} x_2(mT)\,z^{-m} \to X_1(z)\cdot X_2(z)$$

* کانولوشن در حوزهٔ مختلط:

If
- $x_1(k)=0 \quad k<0 \to X_1(z) = Z[x_1(k)] \quad |z|>R_1$
- $x_2(k)=0 \quad k<0 \to X_2(z) = Z[x_2(k)] \quad |z|>R_2$

در اینصورت خواهیم داشت:

$$Z[x_1(k)\,x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \zeta^{-1} X_2(\zeta)\,X_1(\zeta^{-1}z)\,d\zeta \qquad R_2<|\zeta|<\frac{|z|}{R_1}$$

اثبات:

* $$x_2(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X_2(z)\,z^{k-1}\,dz \to \frac{1}{2\pi j}\oint_c X_2(\zeta)\,\zeta^{k-1}\,d\zeta \qquad |z|>R \to$$

$$Z[x_1(k)\,x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j}\sum_{k=0}^{\infty}\oint_c X_2(\zeta)\,\zeta^{k-1}\,x_1(k)\,z^{-k}\,d\zeta \to$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c \zeta^{-1} X_2(\zeta)\sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)\,(\zeta^{-1}z)^{-k}\,d\zeta \longrightarrow \frac{1}{2\pi j}\oint_c \zeta^{-1} X_2(\zeta)\,X_1(\zeta^{-1}z)\,d\zeta$$

Parseval theorem

* قضیه پارسوال :

با تعریف مشابه قضیه کانولوشن مختلط اگر در معادله کانولوشن مختلط $|Z|=1$

$$Z\left[x_1(k)\,x_2(k)\right]\Big|_{|Z|=1} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)\,x_2(k) \longrightarrow \frac{1}{2\pi j}\oint_c \zeta^{-1} X_2(\zeta)\,X_1(\zeta^{-1})\,d\zeta$$

اگر قرار دهیم $x_1(k)=x_2(k)=x(k)$ در این صورت خواهیم داشت:

$$x(k)=\sum_{k=0}^{\infty} x^2(k) \longrightarrow \frac{1}{2\pi j}\oint_c \zeta^{-1} X(\zeta)\,X(\zeta^{-1})\,d\zeta \longrightarrow \frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1} X(z)\,X(z^{-1})\,dz$$

* عکس تبدیل Z :

برای آن ٤ روش موجود است که هر یک از آنها را به شرح و با یک مثال بیان می کنیم:

۱) تقسیم مستقیم: اگر $X(z)$ را بصورت سری توانی بسط دهیم، داریم:

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,z^{-k} \longrightarrow x(0)+x(1)\,z^{-1}+\dots+x(m)\,z^{-m}+\dots$$

برای نمونه داریم:

$$X(z)=\frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)} \longrightarrow \frac{10z^{-1}+5z^{-2}}{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}}$$

$$10z^{-1}+5z^{-2} \;\Big|\; 1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}$$

$$10z^{-1}+17z^{-2}+18z^{-3}+18.68z^{-4}+18.736z^{-5}$$

* در این تقسیم واضح است که نشان می دهد مقادیر از ۱۰ شروع شده و در ۱۹ ثابت می شود

۲) روش محاسباتی (کامپیوتری):

برای نمونه می خواهیم برای $X(z)$ عکس تبدیل لاپلاس را محاسبه کنیم:

$$X(z)=\frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)}$$

یادآوری: عکس تبدیل Z یک تابع، معادل بدست آوردن پاسخ ضربه $\delta(t)$ ، (krane cleen) به تابع انتقال است.

$$X(z) = \frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2} \longrightarrow X(z)(z^2-1.2z+0.2) = (10z+5)\delta(t) \longrightarrow$$

$$x(k+2) - 1.2\,x(k+1) + 0.2\,x(k) = 10\,\delta_0(k+1) + 5\,\delta_0(k)$$

با فرض اینکه $\delta_0(-2) = \delta_0(-1) = 0$ ، $x(-2) = x(-1) = 0$ در این صورت برای $k=-2$ داریم:

$$x(0) - 1.2x(-1) + 0.2x(-2) = 10\,\delta_0(-1) + 5\,\delta_0(-2) \longrightarrow x(0) = 0$$

$$k=-1 \longrightarrow x(1) - 1.2\,x(0) + 0.2\,x(-1) = 10\,\delta_0(0) + 5\,\delta_0(-1) \longrightarrow x(1) = 10$$

به همین ترتیب داریم $\longrightarrow x(2) = 17$ ، $x(3) = 18.4$ و ...

۳) بسط به کسرهای جزئی:

برای نمونه برای تابع $X(z)$ عکس تبدیل Z آن را محاسبه می‌کنیم.

$$1)\ X(z) = \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}} \longrightarrow X(z) = z^{-1}\frac{1}{1-az^{-1}} \longrightarrow z^{-1}Y(z) : \frac{1}{1-az^{-1}}$$

از آنجا که می‌دانیم عکس تبدیل Z عبارت $\frac{1}{1-az^{-1}}$ معادل ، $(x(k) = a^{k-1})$ است لذا:

$$Z^{-1}(Y(z)) = y(k) = a^k \qquad Z^{-1}(X(z)) = a^{k-1}$$

$$2)\ X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-0.2)}$$

در این تابع اول تبدیل به z^{-1} می‌شود که در این صورت داریم:

$$Z[x(k)] = X(z) = z\left(\frac{12.5}{z-1} - \frac{2.5}{z-0.2}\right) \longrightarrow X(z) = z^{-1}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = 1^k$$

$$Z^{-1}\left(\frac{1}{1-0.2z^{-1}}\right) = 0.2^{k-1} \longrightarrow x(k) = 12.5(1 - (0.2)^{k-1})$$

$$3)\ X(z) = \frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})} \longrightarrow X(z) = z\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-e^{-aT}}\right) \longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

$$Z^{-1}(X(z)) = 1 - e^{-akT}$$

۴) $X(z)=\dfrac{z+2}{(z-2)z^{2}} \longrightarrow X(z)=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z^{2}}-\dfrac{1}{z} \longrightarrow \dfrac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}-z^{-2}-z^{-1} \longrightarrow$

$Z^{-1}\left(\dfrac{1}{1-2z^{-1}}\right)=2^{k} \longrightarrow Z^{-1}\left(\dfrac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}\right)=\begin{cases} a^{k-1} & k\geq 1 \\ 0 & k\leq 0 \end{cases}$

$Z^{-1}(z^{-2})=\begin{cases} 1 & k=2 \\ 0 & k\neq 2 \end{cases} \qquad Z^{-1}(z^{-1})=\begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & k\neq 1 \end{cases}$

$x(k)=\begin{cases} 0 & k=0 \\ 1 & k=1 \\ 1 & k=2 \\ 2^{k-1} & k>2 \end{cases}$

۵) $X(z)=\dfrac{2z^{3}+z}{(z-2)^{2}(z-1)} \longrightarrow X(z)=z\left(\dfrac{9}{(z-2)^{2}}-\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{3}{z-1}\right) \longrightarrow$

$X(z)=\dfrac{9z^{-1}}{(1-2z^{-1})^{2}}-\dfrac{1}{1-2z^{-1}}+\dfrac{3}{1-z^{-1}} \longrightarrow$

$Z^{-1}\left(\dfrac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})^{2}}\right)=k(2^{k-1})$ ، $Z^{-1}\left(\dfrac{1}{1-2z^{-1}}\right)=2^{k}$ ، $Z^{-1}\left(\dfrac{1}{1-z^{-1}}\right)=1$

$x(k)=\begin{cases} 2 & k=0 \\ 9k(2^{k-1})-2^{k}+3 & k\geq 1 \end{cases}$

* البته این مثال آخر را می توان از روشی دیگر حل کرد که داریم؛

۶) $X(z)=2+\dfrac{10z^{2}-15z+8}{(z-2)^{2}(z-1)} \longrightarrow X(z)=2+\dfrac{9z^{-1}}{(1-2z^{-1})^{2}}+\dfrac{2z^{-1}}{1-2z^{-1}}+\dfrac{3z^{-1}}{1-z^{-1}}$

$Z^{-1}(2)=\begin{cases} 2 & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases} \qquad Z^{-1}\left(\dfrac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})^{2}}\right)=\begin{cases} k2^{k-1} & k\geq 1 \\ 0 & k\leq 0 \end{cases}$

$Z^{-1}\left(\dfrac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}\right)=\begin{cases} 2^{k-1} & k\geq 1 \\ 0 & k<1 \end{cases} \qquad Z^{-1}\left(\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)=\begin{cases} 1 & k\geq 1 \\ 0 & k\leq 0 \end{cases}$

۵۷) $X(z) = \dfrac{z^2+6z}{(z^2-2z+2)(z-1)} \longrightarrow Y(z) = \dfrac{X(z)}{z} \longrightarrow \dfrac{7}{z-1} + \dfrac{-7z+8}{z^2-2z+2} \longrightarrow \dfrac{7}{1-z^{-1}} - \dfrac{7(1-\frac{8}{7}z^{-1})}{1-2z^{-1}+2z^{-2}}$

با توجه به رابطه

$$Z[e^{-akT}\cos\omega t] = \frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$$

$$Z[e^{-akT}\sin\omega t] = \frac{e^{-aT}z^{-1}\sin\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T - e^{-2aT}z^{-2}}$$

If $X_1(z) = \dfrac{1-\frac{8}{7}z^{-1}}{1-2z^{-1}+2z^{-2}} \longrightarrow \dfrac{1-z^{-1}}{1-2z^{-1}+2z^{-2}} - \dfrac{1}{7}\dfrac{z^{-1}}{1-2z^{-1}+2z^{-2}}$

اگر داشته باشیم ⟵ ($e^{-2aT}=2$ ؛ $e^{-aT}\cos\omega T = 1$) به عبارتی

$e^{-aT} = \sqrt{2}$

$\omega = \frac{\pi}{4}$ ؛ $\cos\omega T = \sin\omega T = \frac{1}{2}$

$*\; X_1(z) = \dfrac{1-\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}{1-2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}+2z^{-2}} - \dfrac{1}{7}\dfrac{\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}{1-2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}+2z^{-2}} \longrightarrow Z^{-1}(X_1(z)) = e^{-akT}\cos\omega T - \frac{1}{7}e^{-akT}\sin\omega$

$(\sqrt{2})^k\cos\frac{k\pi}{4} - \frac{1}{7}(\sqrt{2})^k\sin\frac{k\pi}{4}$ ؛ نهایتاً $Z^{-1}(X(z)) = z^{-1}\left(\frac{7}{1-z^{-1}} - 7X_1(z)\right) \longrightarrow$

$$Z^{-1}(X(z)) = 7 - 7\left[(\sqrt{2})^k\cos\frac{(k\pi)}{4} - \frac{1}{7}(\sqrt{2})^k\sin\frac{(k\pi)}{4}\right]$$

* مروری بر روابط آنالیز مختلط:

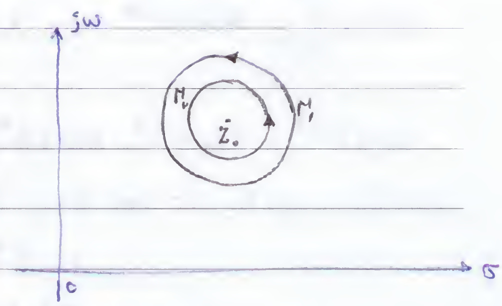
فرض کنید z_0 یک نقطه منفرد (قطب) از $F(z)$ باشد؛ می‌توان نشان داد که عدد مثبت چون r_1 و r_2 وجود دارد که $F(z)$ در هر نقطه از محدوده ($r_1 \le |z-z_0| < r_2$) تحلیلی باشد؛ اگر دایره به شعاع r_1 به مرکز z_0 را Γ_1 بنامیم و نشان دهیم و Γ_2 را هر دایره‌ای به مرکز z_0 و به شعاع ($r_2 \ge r_1$) در نظر بگیریم بسط سری لوران (Laurent) از $F(z)$ حول قطب (z_0 و z) به این صورت می‌توان نمایش داد:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

که در آن ضرایب a_n ، b_n از این انتگرال‌ها بدست می‌آیند:

$$a_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma_1}\frac{F(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma_2}\frac{F(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz \qquad n=0,1,2,\ldots$$



ضمن اینکه می‌توان دید که:

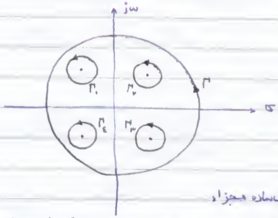
$$b_1 = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma_2}F(z)dz$$

(پ) می‌توان نشان داد که مقدار انتگرال فوق (b_1) برای هر مسیر بسته Γ که جایگزین مسیر قبلی شود، بگونه‌ای که $F(z)$ بر روی Γ و درون آن تحلیلی باشد، به جز در $(z-z_0)$، تغییر نخواهد کرد؛ مقدار انتگرال مستقل از مسیر است.

اینک با توجه به قضیه (Cauchy – Goursat) داریم

$$\oint_{\Gamma} F(z)\,dz - \oint_{\Gamma_1} F(z)\,dz = 0 \longrightarrow b_1 = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} F(z)\,dz$$

b_1 را باقیمانده (residue) $F(z)$ در نقطه z_0 می‌نامیم؛



* اینک اگر مسیر بسته Γ مقدار m قطب ساده مجزای $(z_1, \dots, z_m)$ را در برگیرد، که در آن Γ_1 تا Γ_m مسیرهای بسته‌ای هستند که هر یک به تنهایی قطبهای z_1 تا z_m را در بر می‌گیرند

$$\oint_{\Gamma} F(z)\,dz - \oint_{\Gamma_1} F(z)\,dz - \dots - \oint_{\Gamma_m} F(z)\,dz = 0$$

و Γ همه قطبها را در بر می‌گیرد آنگاه داریم؛

$$\oint_{\Gamma} F(z)\,dz = \oint_{\Gamma_1} F(z)\,dz + \dots + \oint_{\Gamma_m} F(z)\,dz \longrightarrow$$

$$2\pi j\,(b_{11} + b_{12} + \dots + b_{1m}) \longrightarrow 2\pi j\,(k_1 + k_2 + \dots + k_m)$$

(که در آن k_1 تا k_m باقیمانده‌ها در z_1 تا z_m)

اینک اگر $X(z)$ تبدیل z سیگنال $x(k)$ باشد

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,z^{-k} \longrightarrow x_0 + x(T)z^{-1} + \dots$$

و اگر طرفین رابطه را در z^{k-1} ضرب کنیم خواهیم داشت

$$X(z)z^{k-1} = x(0)z^{k-1} + x(T)z^{k} + \dots + x(kT)z^{-1} + \dots$$

اگر به عبارت فوق دقت کنیم در واقع بسط سری لوران $(X(z)z^{k-1})$ حول نقطه $z=0$ است؛ اگر C دایره به مرکز مبدأ و دربرگیرنده کلیه قطبهای $(X(z)z^{k-1})$ باشد آنگاه برای $x(kT)$ ضریب (z^{-1}) داریم؛

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C} X(z)\,z^{k-1}\,dz$$

که بکمک قضیه باقیمانده قابل محاسبه است.

اگر قطبها $X(z)z^{k-1}$ در z_1 تا z_m باشند و C_i دایره (حول قطب z_i) باشد:

$$\oint_{c} X(z)z^{k-1}dz \longrightarrow \oint_{c_1} X(z)z^{k-1}dz+\dots+\oint_{c_m} X(z)z^{k-1}dz \longrightarrow 2\pi j(k_1+\dots+k_m)\longrightarrow$$

$\sum_{i=1}^{m}$ (باقیمانده $X(z)z^{k-1}$ در قطب $z=z_i$)

در این ارزیابی مخرج $X(z)z^{k-1}$ قطب ساده‌ای در ($z=z_i$) دارد لذا باقیمانده چنین محاسبه می‌شود:

$$* \; k_i=\lim_{z\to z_i}\left((z-z_i)X(z)z^{k-1}\right)$$

اگر $X(z)z^{k-1}$ قطب مرتبه q در z_i داشته باشد، محاسبات چنین خواهد بود:

$$* \; k_i=\frac{1}{(q-1)!}\lim_{z\to z_i}\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\left((z-z_i)^q X(z)z^{k-1}\right)$$

* برای نمونه چند مثال را بیان می‌کنیم:

1) $X(z)=\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}\longrightarrow X(z)z^{k-1}=\frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})}$ $\quad k=0,1,2,\dots$

قطبهای عبارت فوق به ازای تمام مقادیر k در $z_1=1$ و $z_2=e^{-aT}$ قرار دارند؛ لذا:

$Z^{-1}(X(z))=x(k)=\sum_{i=1}^{2}$ (باقیمانده عبارت $\frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})}$) $=k_1+k_2$

$k_1=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})}=1$; $k_2=\lim_{z\to e^{-aT}}\frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})}(z-e^{-aT})=-e^{-aTk}$

$x(kT)=x(k)\longrightarrow k_1+k_2=1-e^{-aTk}$ $\quad k=0,1,2,\dots$

2) $X(z)=\frac{z^2}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}\longrightarrow X(z)z^{k-1}=\frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$ $\quad k=0,1,2,\dots$

این عبارت یک قطب ساده در e^{-aT} و یک قطب مرتبه دوم در یک دارد؛

$x(k)=\sum_{i=1}^{2}$ (باقیمانده عبارت $\frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$) $=k_1+k_2$

$k_1=\lim_{z\to e^{-aT}}\frac{z^{k+1}}{(z-1)^2}\longrightarrow\frac{-e^{-a(k+1)T}}{(1-e^{-aT})^2}$

$$k_2 = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^{k+1}}{z-e^{-aT}}\right) \longrightarrow \lim_{z\to 1}\frac{(k+1)z^{k}(z-e^{-aT})-z}{(z-e^{-aT})^2} \longrightarrow \frac{k}{1-e^{-aT}} - \frac{e^{-aT}}{(1-e^{-aT})^2}$$

$$x(kT) = x(k) \longrightarrow k_1+k_2 = \frac{e^{-aT}\cdot e^{-akT}}{1-e^{-aT}} + \frac{k}{1-e^{-aT}} - \frac{e^{-aT}}{(1-e^{-aT})^2} \longrightarrow$$

$$\frac{kT}{T(1-e^{-aT})} - \frac{e^{-aT}(1+e^{-kaT})}{(1-e^{-aT})^2} \qquad k=0,1,2,\dots$$

۳) $X(z) = \frac{10}{(z-1)(z-2)} \longrightarrow X(z)z^{k-1} = \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)}$

for $k=0 \longrightarrow X(z)z^{k-1} = \frac{10}{(z-1)(z-2)z}$ ، for $k\geq 1$ $X(z)z^{k-1} = \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)}$

$$k=0 \longrightarrow x(0) = \lim_{z\to 0}\frac{10}{(z-1)(z-2)} + \lim_{z\to 1}\frac{10}{(z-2)z} + \lim_{z\to 2}\frac{10}{(z-1)z} = 0$$

$$k\geq 1 \longrightarrow x(k) = \lim_{z\to 1}\frac{10z}{z-2} + \lim_{z\to 2}\frac{10z^{k-1}}{z-1} = -10 + 5(2^{k})$$

$x(k) = 5\,\delta_0(k) + 10(2^{k-1}-1) \longleftarrow$ یا می‌توان چنین نوشت

* تابع انتقال پالسی و رشته وزنی :

اگر رابطهٔ ورودی و خروجی یک سیستم گسسته از زمان به صورت معادله تفاضلی زیر داده شده باشد که در آن (u) سیگنال ورودی و (x) سیگنال خروجی سیستم است :

$$x(k) + a_1x(k-1) + \dots + a_n x(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n)$$

با گرفتن تبدیل Z از طرفین:

$$Z(x(k)) = X(z) \longrightarrow X(z) + a_1z^{-1}X(z) + \dots + a_n z^{-n}X(z) = b_0U(z) + b_1z^{-1}U(z) + \dots \longrightarrow$$

$$(1+a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n})X(z) = (b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_nz^{-n})U(z) \longrightarrow X(z) = \frac{b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_nz^{-n}}{1-a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n}}U(z)$$

حال اگر $u(k) = \delta_0(k) \longrightarrow X(z) = \frac{b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n}} = G(z)$

که $G(z)$ را تابع انتقال پالسی می‌نامیم و متقابلاً $g(k) = Z^{-1}(G(z))$ را رشته وزنی (weighting sequence) می‌نامیم.

Subject . Year. Month. Day.

$$x(k+2)+a_1x(k+1)+a_2x(k)=b_0u(k+2)+b_1u(k+1)+b_2u(k)$$

برای نمونه داریم؛

$$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)+a_1(zX(z))-zx(0)+a_2X(z)=b_0(z^2U(z)-z^2u(0)-zu(1))+b_1(zU(z)$$

اگر سیستم قبل از $(k=0)$ در حالت استراحت در نظر گرفته شود؛ $x(k)=0 \quad for \quad k<0$

در این صورت خواهیم داشت؛

$$x(0)+a_1x(-1)+a_2x(-2)=b_0u(0)+b_1u(-1)+b_2u(-2) \longrightarrow x(0)=b_0u(0)$$

$$x(1)+a_1x(0)+a_2x(-1)=b_0u(1)+b_1u(0)+b_2u(-1) \longrightarrow x(1)=-a_1x(0)+b_0u(1)+b_1u(0)$$

اگر این مقادیر را در معادله قرار دهیم خواهیم داشت؛

$$X(z)=\frac{b_0z^2+b_1z+b_2}{z^2+a_1z+a_2}U(z)$$

در این صورت تابع انتقال پالسی برابر است با؛

$$G(z)=\frac{b_0z^2+b_1z+b_2}{z^2+a_1z+a_2} \longrightarrow \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

مثال؛ با استفاده از تبدیل Z معادله تفاضلی ذیل را حل کنید؛

$$x(k+2)+3x(k+1)+2x(k)=0 \quad \begin{cases} x(k)=0 & for \quad k<0 \\ x(0)=0 \;،\; x(1)=1 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}(\text{معادله}) \longrightarrow z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)+3zX(z)-3x(0)+2X(z)=0 \longrightarrow$$

$$X(z)=\frac{z}{z^2+3z+2} \longrightarrow \frac{z}{(z+1)(z+2)} \longrightarrow \frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2} \longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-2z^{-1}} \longrightarrow$$

$$x(k)=(-1)^k-(-2)^k \quad k=0,1,2,\dots$$

مثال؛ پاسخ سیستم با معادلات تفاضلی را بدست آورید؛

$$x(k+2)-3x(k+1)+2x(k)=\delta_0(k) \;؛\; x(k)=0 \quad for \quad k<0 \quad (x(0)=0 \;،\; x(1)=0)$$

$$(z^2-3z+2)X(z)=\delta(z)=1 \longrightarrow X(z)=\frac{1}{z^2-3z+2} \longrightarrow X(z)=\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2} \longrightarrow \frac{-z^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)=\begin{cases} 1 & k=1,2,\dots \\ 0 & k\leq 0 \end{cases} \;؛\; \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}\right)=\begin{cases} 2^{k-1} & k=1,2,3,\dots \\ 0 & k\leq 0 \end{cases}$$

$x(k) = -1 + 2^{k-1} \qquad k = 1,2,3,\dots$

و برای اینکار نیز می‌توانستیم از رابطهٔ $zX(z)$ استفاده کنیم:

$$zX(z) = \frac{-2}{z-1} + \frac{z}{z-2} \rightarrow -\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

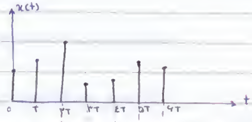
$$Z^{-1}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = 1$$

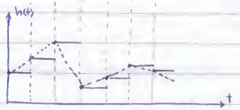
$$Z^{-1}\left(\frac{1}{1-2z^{-1}}\right) = 2^{k} \qquad k \geq 0$$

$$Z(x(k+1)) = zX(z) - z(x(0)) \rightarrow zX(z) \;:\; x(k+1) = -1 + 2^{k} \qquad k \geq 0$$

$$x(k+1) = -1 + 2^{k-1} \qquad k \geq 1$$

بازسازی سیگنال نمونه برداری شده و Impulse Sampling:





مسئله: می‌خواهیم به کمک نمونه‌های داده‌شده از $x(t)$ سیگنال $h(t)$ را به گونه‌ای بسازیم که حتی الامکان به $x(t)$ نزدیک باشد.

در حالت کلی $h(t)$ می‌تواند بصورت رابطه‌ای به این صورت نوشته شود (و حتی عبارت دیگر که متفاوت با این عبارت است)

$$h(kT+\tau) = a_n\tau^{n} + a_{n-1}\tau^{n-1} + \dots + a_1\tau + a_0 \;:\; 0 \leq \tau \leq T$$

به این عبارت نگهدار مرتبه n گوییم (nth order hold)

در واقع سیستم نگهدار هر مرتبه از مقادیر $n+1$ دورهٔ گذشته استفاده می‌کند، تا مقدار سیگنال در بازهٔ بعدی را بازسازی نماید (n) بزرگتر، جزئیات بیشتر را بدست می‌آورد؛ لذا سیگنال بازسازی شده به سیگنال آنالوگ اولیه شبیه‌تر می‌شود.

در ساده‌ترین حالت اگر $n=0$ باشد (Zero order hold)

$$h(kT+\tau) = x(kT) \;:\; 0 \leq \tau \leq T$$

* نمایش سیگنال $h(t)$:

$$h(t) = x(0)\left(1(t) - 1(t-T)\right) + x(T)\left(1(t-T) - 1(t-2T)\right) + \dots$$

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\left(1(t-kT) - 1(t-(k+1)T)\right)$$

بدست آوردن مدل پیوسته در فضای لاپلاس:

$$\mathcal{L}\left(1(t-kT)\right) = \frac{e^{-kTs}}{s} \quad ; \quad \mathcal{L}\left(h(t)\right) = H(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} \rightarrow$$

$$H(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

و نیز می توان نوشت:

$$H(s) = G_{h_0}(s)\,X^*(s) \begin{cases} G_{h_0}(s) = \dfrac{1-e^{-Ts}}{s} \\ X^*(s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \end{cases}$$

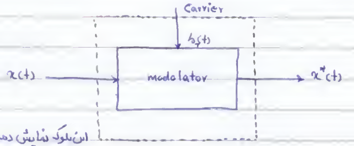
از آنجا که $X^*(s)$ معادل تبدیل لاپلاس سیگنال $x(kT)$ (ناپیوسته)

است، لذا می توان تابع تبدیل سیگنال نگهدار مرتبه صفر را چنین در نظر گرفت.

$$G_{h_0}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \qquad x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$$

حال اگر تعریف کنیم که:

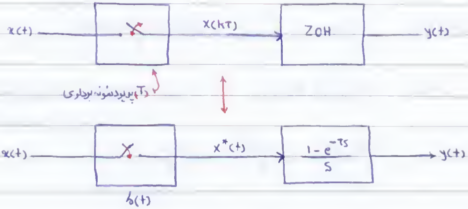
$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \rightarrow x^*(t) = \dots + x_0\,\delta(t) + x(T)\,\delta(t-T) + \dots \rightarrow \sum_{k=-\infty} x(kT)\,\delta(t-$$



این بلوک نمایش دهنده طریقه تولید $x^*(t)$

براساس $x(t)$ می باشد.

* تبدیل Z سیگنال نمونه برداری شده یا ضربه؟



$X^*(s) = \mathcal{L}(x^*(t)) \longrightarrow x(0)\,\mathcal{L}(\delta(t)) + x(T)\,\mathcal{L}(\delta(t-T)) + \cdots \longrightarrow$

$x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \cdots \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kST}$

اگر تعریف کنیم:

$e^{-Ts} = z^{-1} \longrightarrow s = \frac{1}{T}\ln z \;:\; X^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \longrightarrow X^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = X(z)$

* حال برای نمونه داریم:

If $x(t) = \delta(kT) \longrightarrow x^*(t) = x(t)\,\delta_T(t) \longrightarrow x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$

$x(kT) = 0$ for $k \neq 0 \longrightarrow x^*(t) = x(0)\,\delta(0) \longrightarrow X^*(s) = x(0) \longrightarrow \delta_0(0) = 1$

$X(z) = Z(\delta_0(kT)) = 1$ که رابطه قبلی را برای $x(t) = \delta_0$ تایید کند

مثال: تبدیل Z سیگنال نمونه برداری شده را محاسبه کنید:

$x(t) = 1(t) \longrightarrow x^*(t) = x(t)\,\delta_T(t) \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT) \longrightarrow X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = \frac{1}{1-e^{-Ts}}$

$X(z) = Z(1(t)) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ که رابطه قبلی را برای $x(t) = 1(t)$ تایید می‌کند.

* تابع انتقال سیستمهای نگهدار:

نشان دادیم که به ازای $x = 0$ (نگهدار مرتبه صفر) $G_{h0} = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$

If $n = 1 \longrightarrow h(kT+\tau) = a_1\tau + x(kT)$; $0 \leq \tau \leq T$ $k = 0,1$

شرایط مرزی: $h((k-1)T) = x((k-1)T) \longleftrightarrow -a_1T + x(kT) \longrightarrow$

شیب خط

$a_1 = \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} \longrightarrow h(kT+\tau) = x(kT) + \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}\,\tau$

* خط مستقیم که از نقطه $x(kT)$ شروع می‌شود و به $x((k+1)T)$ ختم می‌گردد:

اگر محاسبات را انجام دهیم:

$G_{h1}(s) = \left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)^2 \frac{Ts+1}{T}$

* بدست آوردن تبدیل Z بکمک انتگرال کانولوشن :

اگر در نظر بگیریم :

$$x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} x(t)\,\delta(t-kT) \longrightarrow x(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT) \quad ; \quad \mathcal{L}(\delta(t-kT))=e^{-kTs}$$

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\right)=1+e^{-Ts}+\cdots \longrightarrow \frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

یادآوری : $\mathcal{L}(f(t)g(t))=\int_0^{\infty} f(t)g(t)e^{-st}\,dt$; $f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{ts}\,ds$, $t>0$

(که در آن C مختصات متغیر برای F(s))

$$\mathcal{L}(f(t)g(t))=\frac{1}{2\pi j}\int_0^{\infty}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(p)e^{pt}\,dp\;g(t)e^{-st}\,dt$$

چون F(s) محدود است در این صورت انتگرال را مرتب کرد :

$$\mathcal{L}(f(t)g(t))=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(p)\,dp\int_0^{\infty}g(t)e^{-(s-p)t}\,dt \longrightarrow \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(p)\,G(s-p)\,dp$$

حال اگر به جای f و g متغیرهای $x(t)$ و $\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)$ را قرار دهیم :

$$G(s)=\mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\right)=\frac{1}{1-e^{-Ts}} \quad ; \quad G(s-p)=\frac{1}{1-e^{-(s-p)T}}$$

که محل قطبها $p=s\pm j\frac{2\pi k}{T}$

$$(*)\quad X^*(s)=\mathcal{L}\left(x(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\right) \longrightarrow \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}X(p)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp$$

$$P=s+j\frac{2\pi k}{T} \longrightarrow s+j\omega_s k \qquad k=0,1,2,\dots$$

فرکانس نمونه برداری

که درآن کانتور C در محلی باشد که خط مربوط به آن قطبهای $X(p)$ را از قطبهای $\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}$ جدا سازد، به تساوی فوق (*) انتگرال کانولوشن گویند.

درواقع انتگرال فوق می توان از روش باقیمانده ها با ایجاد مسیر بسته ای که شامل خط ($c-j\infty$ تا $c+j\infty$) و دایره ای به شعاع بینهایت بدست می آید. بطور مشابه انتگرال فوق می تواند بر روی مسیر بسته شامل خط مزبور و نیم دایره بینهایت در نیم صفحه سمت راست ارزیابی گردد.

* اگر فرض کنیم $X(s)=\frac{P(s)}{q(s)}$ و درجه q از P بیشتر باشد، پس $\lim_{s\to\infty} X(s)=0$ لذا با در نظر گرفتن مسیر در نیم صفحه چپ

$$X^*(s)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}dp \longrightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint \frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}dp-\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_L}\frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}dp$$

که در آن Γ_L نیم دایره با شعاع بینهایت در نیم صفحه سمت چپ است.

در این حال قطبهای $\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}$ خارج از مسیر ذکر شده قرار خواهند گرفت، با توجه به فرض بیشتر بودن درجه مخرج $X(s)$ از درجه صورت آن انتگرال روی Γ_L صفر خواهد شد، چون برای $|s|\to\infty$ مقدار روی مسیر صفر است.

$$X^*(s)=\frac{1}{2\pi j}\oint\frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}dp \longrightarrow \sum \left(\text{باقیمانده عبارت } \frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}} \text{ در قطبهای } X(p)\right)\longrightarrow$$

$$\sum\left(\text{باقیمانده } \frac{X(p)z}{z-e^{Tp}} \text{ در قطبهای } X(p)\right)\longrightarrow \sum\left(\text{باقیمانده } \frac{X(s)z}{z-e^{Ts}} \text{ در قطبهای } X(s)\right)\longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n_i-1)!}\lim_{s\to s_i}\frac{d^{n_i-1}}{ds^{n_i-1}}\left((s-s_i)^{n_i}\frac{X(s)z}{z-e^{Ts}}\right)+\sum_{j=k+1}^{n}\lim_{s\to s_j}\left((s-s_j)\frac{X(s)z}{z-e^{Ts}}\right)$$

* که در آن فرض شده $X(s)$ دارای n قطب مکرر و $(m-n)$ قطب ساده باشد.

برای نمونه داریم: $X(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}$

* $$X(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2}{s^2(s+1)}\frac{z}{z-e^{Ts}}\right)+\lim_{s\to -1}\frac{s+1}{s^2(s+1)}\frac{z}{z-e^{Ts}}\longrightarrow$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{-z(z-e^{Ts}+(s+1)(-T)e^{Ts})}{(s+1)^2(z-e^{Ts})^2}+\frac{1}{(-1)^2}\frac{z}{z-e^{Ts}}\longrightarrow\frac{-z-(z-1-T)}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-e^{-T}}\longrightarrow$$

$$\frac{z^{-1}(T-1+e^{-T})+z^{-2}(1-e^{-T}-Te^{-T})}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-T}z^{-1})}$$

* گفتیم که ضمناً می توان انتگرال کانولوشن را روی نیم صفحه راست نیز انجام داد، در این صورت مسیر باید فقط کلیه قطبهای $\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}$ را در برگیرد.

$$X^*(s)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}dp\longrightarrow\frac{1}{2\pi j}\oint\frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}dp-\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_R}\frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}dp$$

Subject . Year. Month. Day.

اگر تولر قبلی، قرینی در مخرج بر صورت $X(p)$ برقرار باشد و ضمناً تفاوت درجه صورت و مخرج ۲ و یا بیشتر باشد، چون سرعت به صفر رسیدن $X(S)$ سریع‌تر از سرعت افزایش S بخش مسیر روی Γ_R است لذا انتگرال روی Γ_R صفر خواهد شد.

اما اگر تفاوت درجه صورت و مخرج تنها یک باشد، می‌توان نشان داد که سهم انتگرال روی Γ_R مقدار مشخص ذیل است:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_R}\frac{X(p)}{1-e^{-T(S-p)}}\,dp = \frac{1}{2}x(0^+)$$

جهت انتگرال عقربه ساعت

$$\text{but}\quad \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{X(p)}{1-e^{-T(S-p)}}\,dp \longrightarrow (-)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lim_{p\to S+j\omega_s k}\left((p-(S+j\omega_s k))\frac{X(p)}{1-e^{-T(S-p)}}\right)\longrightarrow$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{X(p)}{\frac{d}{dp}\left(1-e^{-T(S-p)}\right)}\Bigg|_{p=S+j\omega_s k}\longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{X(S+j\omega_s k)}{-T} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(S+j\omega_s k)$$

$$X^*(S) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(S+j\omega_s k)\begin{cases}0 & n_p-n_z\geq 2\\ \frac{X(0^+)}{2} & n_p-n_z=1\end{cases}$$

$$X^*(S) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(S+j\omega_s k)\Big|_{S=\frac{1}{T}\ln Z} + \begin{cases}0 & n_p-n_z\geq 2\\ \frac{X(0^+)}{2} & n_p-n_z=1\end{cases}$$

مثال: $X(Z)$ تابع $x(t)=\begin{cases}e^{-at} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ را به کمک انتگرال کانولوشن محاسبه کنید:

$$\circ\ X(S)=\frac{1}{S+a}\longrightarrow \lim_{S\to\infty}SX(S) = X(0^+) = 1$$

$$X^*(S) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(S+j\omega_s k) + \frac{(X(0^+))}{2}\longrightarrow \frac{1}{T}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(X(S+j\omega_s k)+X(S-j\omega_s k)\right) + X(S)\right] + \frac{1}{2}\longrightarrow$$

$$\frac{1}{T}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{S+j\omega_s k+a}+\frac{1}{S-j\omega_s k+a}\right)+\frac{1}{S+a}\right)+\frac{1}{2}\longrightarrow \frac{1}{T}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(S+a)}{(S+a)^2+(\omega_s k)^2}+\frac{1}{S+a}\right)+\frac{1}{2}\longrightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{2(S+a)}{\omega_s}}{\left(\frac{S+a}{\omega_s}\right)^2+k^2}+\frac{\omega_s}{S+a}\right)+\frac{1}{2}\longrightarrow \frac{\pi}{2\pi}\,\frac{1+e^{-T(S+a)}}{1-e^{-T(S+a)}}+\frac{1}{2} = \frac{1}{1-e^{-aT}e^{-TS}}$$

Subject . Year. Month. Day.

(باتوجه به اینکه میدانیم) $\longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+k^2} + \frac{1}{x} = \pi \frac{1+e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}}$ ، $2\pi \frac{s+a}{\omega_s} = T(s+a)$

Final $\longrightarrow X(z) = \dfrac{1}{1-e^{aT}z^{-1}}$

* بدست آوردن تبدیل Z توابعی که شامل عبارت $\frac{1-e^{-Ts}}{s}$ هستند:

ZOH

$$X(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} G(s) \longrightarrow 1-e^{-Ts} \frac{G(s)}{s} \longrightarrow G_1(s) = \frac{G(s)}{s} \quad ، \quad X(s) = (1-e^{-Ts}) G_1(s)$$

If : $X_1(s) = e^{-Ts} G_1(s) \longrightarrow$ فرض شود

$g_0(t) = \mathcal{L}^{-1}(e^{Ts}) = \delta(t-T)$

$g_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(G_1(s))$

$$x_1(t) = \int_0^t \delta(t-T-\tau) g_1(\tau) d\tau \longrightarrow g_1(t-T)$$

If : $Z[g_1(t)] = G_1(z)$ ، $Z(x_1(t)) = Z(g_1(t-T)) = z^{-1} G_1(z) \longrightarrow$

$$X(z) = Z(G_1(s) - e^{-Ts} G(s)) \longrightarrow Z(g_1(t)) - Z(x_1(t)) \longrightarrow G_1(z) - z^{-1}G_1(z) = (1-z^{-1})G_1(z)$$

* $X(z) = Z(X(s)) = (1-z^{-1}) Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$

روابط قبلی برای ZOH چنین خواهد بود:

$$X(s) = (1-e^{-Ts})^2 \frac{Ts+1}{Ts^2} G(s) \longrightarrow X(z) = (1-z^{-1})^2 Z\left(\frac{Ts+1}{Ts^2} G(s)\right)$$

برای نمونه برای تابع $X(s)$ داریم:

$$X(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s+1} \longrightarrow X(z) = Z\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s+1}\right) \longrightarrow (1-z^{-1}) Z\left(\frac{1}{s(s+1)}\right) \longrightarrow$$

$$(1-z^{-1}) Z\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right) \longrightarrow (1-z^{-1})\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right) \longrightarrow \frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

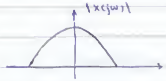
* بازسازی سیگنال گسسته در زمان پیوسته:

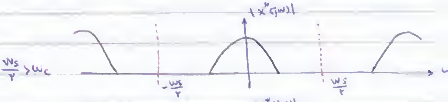
قضیه نمونه برداری:

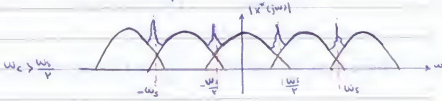
اگر $x(t)$ سیگنال اولیه و $x^*(t)$ سیگنال نمونه برداری شده آن باشد

$$X^*(t) = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega + j\omega_s k) \longrightarrow \cdots + \frac{1}{T}X(j(\omega-\omega_s)) + \frac{1}{T}X(j(\omega+\omega_s)) + \frac{1}{T}(j(\omega+2\omega_s)) + \cdots$$

اگر $x(t)$ دارای طیف فرکانسی مطابق شکل روبرو باشد (پایین گذر)







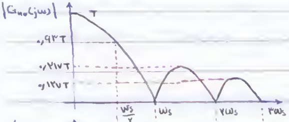
$\frac{1}{2}\omega_s$ را فرکانس نایکوئیست یا (folding) گویند.

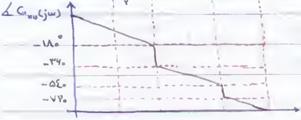
(aliasing) اگر فرکانس سیگنال از فرکانس نمونه برداری بیشتر باشد در این صورت این حالت روی هم افتادگی پیش می آید.

* ویژگیهای مدار نگهدارنده:

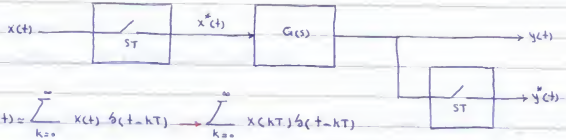
از جمله فیلترهای پایین گذر که بصورت رایج استفاده می شود، مدار نگهدار مرتبه صفر است

$$G_{ho}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \longrightarrow G_h(j\omega) = \frac{1-e^{-Tj\omega}}{j\omega} \longrightarrow \frac{2e^{-j\frac{T\omega}{2}}\left(e^{j\frac{T\omega}{2}} - e^{-j\frac{T\omega}{2}}\right)}{2j\omega} = T\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}}e^{-j}$$





* تابع تبدیل پالسی :



$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\,\delta(t-kT) \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$$

$$y(t) = \begin{cases} g(t)\,x(0) & 0 \leq t < T \\ g(t)\,x(0) + g(t-T)\,x(T) & T \leq t < 2T \\ g(t)\,x(0) + g(t-T)\,x(T) + g(t-2T)\,x(2T) & 2T \leq t < 3T \\ \vdots & \\ g(t)\,x(0) + \cdots + g(t-kT)\,x(kT) & kT \leq t(k+1) < T \end{cases}$$

زیرا داشتیم :

$$g(t) = \int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \int_0^t x(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = g(t)\,x(0) + g(t-T)\,x(T) + \cdots + g(t-kT)\,x(kT) \longrightarrow \sum_{h=0}^{k} g(t-hT)\,x(hT) \quad 0 \leq t < k$$

مقادیر $y(t)$ در زمانهای نمونه‌برداری چنین هستند :

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{k} g(kT-hT)\,.\,x(hT) \longrightarrow \sum x(kT-hT)\,g(hT) \longrightarrow x(kT) * g(kT)$$

که در آن $g(kT)$ را رشته وزنی سیستم و عبارت فوق را جمع کانولوشن می‌نامیم :

اینک اگر بخواهیم تبدیل Z را برای y بدست آوریم :

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\,z^{-k} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} g(kT-hT)\,x(hT)\,z^{-k} \longrightarrow m = k-h \longrightarrow$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} g(mT)\,x(hT)\,z^{-(m+h)} \longrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} g(mT)\,z^{-m} \sum_{h=0}^{\infty} x(hT)\,z^{-h} \longrightarrow G(z).\,X(z) \longrightarrow$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

* اینک نحوه وارد شدن بلوک در تبدیل لاپلاس را بررسی می‌کنیم :

یادآوری: $x^*(s) = x^*(s + j\omega_s k)$

$Y(s) = G(s) . X^*(s)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)\,X^*(s)) = \int_0^t g(t-\tau)\,x^*(\tau)\,d\tau \longrightarrow y(t) = \int_0^t g(t-\tau) \sum_{k=0}^{\infty} x(\tau)\,\delta(\tau - kT)\,d\tau$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,\delta(\tau-kT)\,d\tau \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} g(t-kT)\,x(kT)$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}(y(t)) = \sum_{h=0}^{\infty} \Big[\sum_{k=0}^{\infty} g(kT-hT)\,x(kT)\Big] z^{-h} \longrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(mT)\,x(kT)\,z^{-(k+m)} \quad ; m = h$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} g(mT)\,z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,z^{-k} \longrightarrow G(z)\,X(z)$$

ب) اما با توجه به اینکه دیدیم تبدیل Z می‌تواند از تبدیل لاپلاس ستاره‌دار

که در آن بجای Z مقدار e^{TS} گذاشته شود، بدست آید می توان نتیجه گرفت:

$Y^*(s) = G^*(s) . X^*(s)$

به عبارتی اگر دیاگرام توابع نمونه برداری شده متوالی داشته باشیم تبدیل و ستاره‌دار لاپلاس آنها در هم ضرب شوند.

If $\quad Y^*(s) = (G\,X(s))^* \longrightarrow Y(z) = \mathcal{Z}(y(s)) \longleftrightarrow \mathcal{Z}(G(s)\,X(s)) \longrightarrow \mathcal{Z}(G\,X(s)) \longrightarrow$

$G\,X(z) \neq G(z)\,X(z)$ به عبارتی دیگر اگر در فضای لاپلاس $G(s)\,X(s)$ در فضای لاپلاس $G(z)\,X(z)$ بدست نمی‌آید

مثال: تبدیل Z تابع های $G(s)$ را محاسبه کنید؟ (از سه روش)

1) $G(s) = \dfrac{1}{s+a}$

① $\mathcal{Z}\left(\dfrac{1}{s+a}\right) = \dfrac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$ ② $g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = e^{-aT} \longrightarrow g(kT) = e^{-akT} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (e^{aT} z^{-k}) \longrightarrow \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

③ $$G(z) = \lim_{s \to -a} \left(s+a\,\frac{1}{s+a}\cdot\frac{z}{z-e^{sT}}\right) \longrightarrow \frac{z}{z-e^{-aT}} \longrightarrow \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

2) $G(s) = \dfrac{1-e^{-Ts}}{s}\left(\dfrac{1}{s(s+1)}\right)$

① $G(z) = \mathcal{Z}\left(1-e^{-Ts}\,\frac{1}{s^2(s+1)}\right) \to (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right) \to$

$(1-z^{-1})\left(\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right) - \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}} \to \frac{(T-1+e^{-T})z^{-1}+(1-e^{-T}-Te^{-T})z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})}$

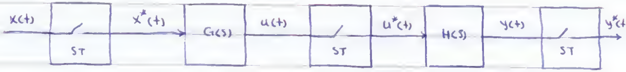
② $G(s) = (1-e^{Ts})\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right) \to g(t) = (t-Te^{-t})\;1(t) - (t-T+1+e^{-(t+T)})\,1(t+T)+\dots$

$g(kT) = (kT - Te^{-kT}) - (kT-T-1+e^{-(kT-T)})\;1((k-1)T) \begin{cases} 0 & k=0 \\ e^{-kT}+T-e^{-(kT-T)} & k=1,2,\dots \end{cases}$

$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(e^{-kT}+T-e^{-(kT-T)})z^{-k} + e^{-T}-1-T \to (1-e^{T})\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT}z^{-1} + T\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} + e^{T}-1-T \to$

$(1-e^{T})\frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}} + \frac{T}{1-z^{-1}} + e^{T}-1-T \to \frac{(T-1+e^{-T})z^{-1}+(1-e^{-T}-Te^{-T})z^{-k}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})}$

* تابع تبدیل پالسی عناصر متوالی:



* روابط در شکل اول:

$U(s) = G(s)\,X^*(s) \quad ; \quad Y(s) = H(s)\,U^*(s)$

$U^*(s) = G^*(s)\,X^*(s) \quad ; \quad Y^*(s) = H^*(s)\,U^*(s) \to Y^*(s) = H^*(s)\,G^*(s)\,X^*(s) \to$

$Y(z) = G(z)\,H(z)\,X(z) \to \frac{Y(z)}{X(z)} = G(z)\,H(z)$

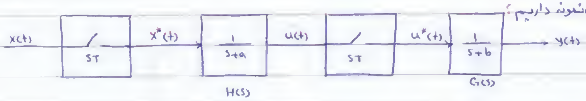
* روابط در شکل دوم: $Y(s) \simeq G(s)H(s)X^*(s) \longrightarrow GH(s)X^*(s)$

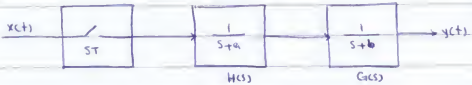
یادآوری: $G(s)H(s) = GH(s)$

$Y^*(s) \simeq (GH(s))^* X^*(s) \longrightarrow GH^*(s)X^*(s) \longrightarrow$

$Y(z) \simeq GH(z)X(z) \longrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} \simeq GH(z) \longrightarrow \mathcal{Z}(GH(s)) \longrightarrow G(z)H(z) \neq GH(z)$

برای نمونه داریم:





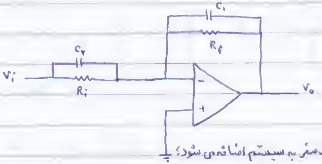
در شکل اول $\longrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} \simeq \frac{Y(z)}{U(z)} \cdot \frac{U(z)}{X(z)} \longrightarrow H(z)G(z) \simeq \mathcal{Z}\left(\frac{1}{s+a}\right)\mathcal{Z}\left(\frac{1}{s+b}\right) \longrightarrow$

$$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-e^{-bT}z^{-1}}$$

در شکل دوم $\longrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} \simeq \mathcal{Z}(G(s)H(s)) \longrightarrow \mathcal{Z}\left(\frac{1}{s+a} \cdot \frac{1}{s+b}\right) \longrightarrow \mathcal{Z}\left(\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right)\right)$

$$\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-bT}z^{-1}}\right) \longrightarrow \frac{1}{b-a}\left(\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}\right)$$

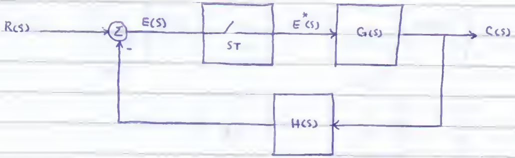
* کنترلر دیجیتال از آنالوگ بهتر است از هر لحاظ ، برای مثال اگر بخواهیم صفر در سیستم اضافه کنیم ، برنامه را عوض می‌کنیم ولی در آنالوگ برای اضافه کردن یک صفر مانند ذیل عمل می‌کنیم:



با اضافه کردن خازن (C_1) یک قطب و (C_2) یک صفر به سیستم اضافه می‌شود:

انواع فیلتر:
- low Pass (پایین گذر)
- High Pass (بالاگذر)
- Band Pass (میان گذر)
- Band reject: یک باند میانی را عبور می‌دهد و اطراف آن دو را عبور نمی‌دهد.

* تابع تبدیل پالس سیستم حلقه بسته:



$E(s) = R(s) - H(s)\,C(s)$ ؛ $C(s) = G(s)E^*(s) \longrightarrow E(s) = R(s) - G(s)H(s)\cdot E^*(s) \longrightarrow$

تبدیل پالسی $\longrightarrow E^*(s) = R^*(s) - GH^*(s)E^*(s)$ ؛ برای اینکه بتوان تبدیل Z گرفته شود (استار) گرفتیم

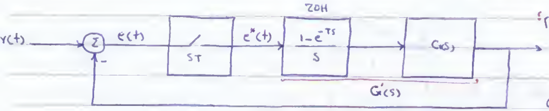
$$E^*(s) = R^*(s) - GH^*(s)\,E^*(s) \longrightarrow E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1+GH^*(s)} \;;\; G^*(s)H^*(s) = \frac{G^*(s)R^*(s)}{1+GH^*(s)}$$

$$C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1+GH(z)}$$

درحالت کلی بین دو تابعی که نمونه بردار باشد تبدیل Z می‌گیریم از تک تک بلوکها؛ و اگر در بین بلوک (نمونه) نباشد، آنها را درهم ضرب و از کل آن یک تبدیل Z می‌گیریم.

(G^* یعنی G که نمونه برداری شده است)

برای نمونه دیگر داریم:



$$G(s) = \frac{k}{s+1}$$

$$G'(z) = \mathcal{Z}(G'(s)) \longrightarrow \mathcal{Z}\left((1-e^{-ST})\frac{k}{s(s+1)}\right) \longrightarrow (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left(\frac{k}{s} - \frac{k}{s+1}\right) \longrightarrow$$

$$\frac{k(1-e^{-T})z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}} \longrightarrow \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{k(1-e^{-T})z^{-1}}{1+(k-(k+1)e^{-T})z^{-1}}$$

* تابع تبدیل پالسی کنترل کننده (دیجیتال) :

درحالت کلی:

$$m(k)+a_1 m(k-1)+a_2 m(k-2)+\dots+a_n m(k-n) = b_0 e(k)+\dots+b_n e(k-n) \rightarrow$$

$$M(z)+a_1 z^{-1}M(z)+\dots+a_n z^{-n}M(z) = b_0 E(z)+b_1 z^{-1}E(z)+\dots+b_n z^{-n}E(z)$$

اغتشاش — اگر دائم باشد (نویز)
— اگر لحظه‌ای باشد (اغتشاش)

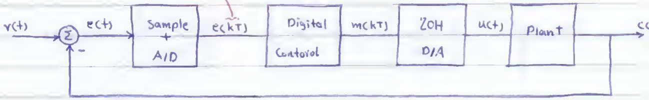
* بهترین سیستم در کنترل رسیدن به تابع انتقال $G(s)=1$ که امکان‌پذیر نیست.

$$G_D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} \longrightarrow \frac{b_0+b_1 z^{-1}+\dots+b_n z^{-n}}{1-a_1 z^{-1}+\dots+a_n z^{-n}}$$

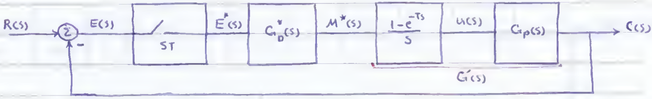
(هر فرآیند دیجیتال نهایتاً به این تابع می‌رسد)

نحوه قرارگرفتن کنترل کننده دیجیتال در سیستم‌های تولید چگونه باشد؟

(در هر پریود مشخص یک مقدار تازه می‌آید)



ZOH پالس‌های گسسته را تبدیل به پله می‌کند.



$$G'(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}G_p(s) \quad , \quad C(s) = \frac{G'(s)}{G_D^*(s)E^*(s)} \longrightarrow C^*(s) = G'^*(s)\,G_D^*(s)\,E^*(s) \longrightarrow$$

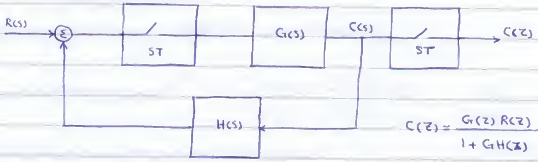
$C(z) = G(z)\, G_D(z)\, E(z)$ ، $E(z) = R(z) - C(z) \longrightarrow$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)\, G'(z)}{1 + G_D(z)\, G'(z)}$$

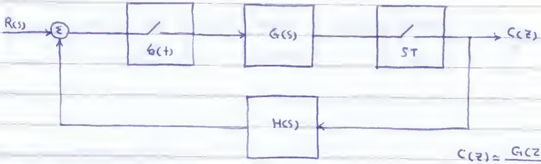
* هر دستگاه و ابزاری که با کامپیوتر کنترل می شود را (DDC) گویند؛

- $C(t)$ در حال حاضر در داخل سیستم دیجیتال است؛

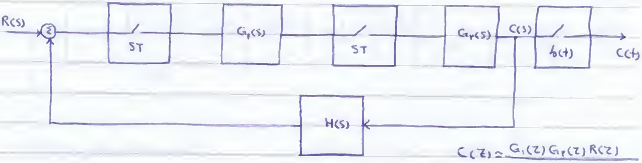
* نحوه چگونه ضرب توابع انتقال در اثر نمونه برداری؛



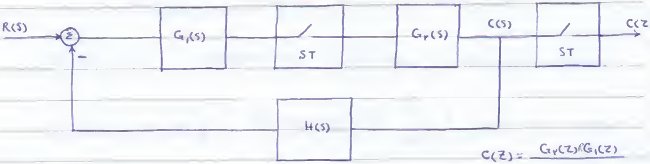
$$C(z) = \frac{G(z)\, R(z)}{1 + GH(z)}$$



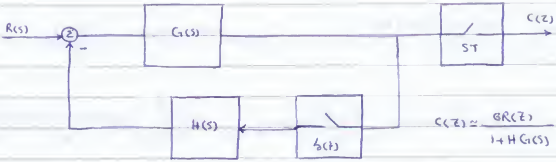
$$C(z) = \frac{G(z)\, R(z)}{1 + G(z)\, H(z)}$$



$$C(z) = \frac{G_1(z)\, G_2(z)\, R(z)}{1 + G_1(z)\, G_2H(z)}$$



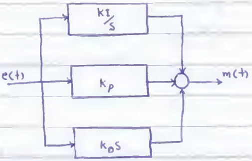
$$C(Z) = \frac{G_2(Z)RG_1(Z)}{1 + G_1G_2H(Z)}$$

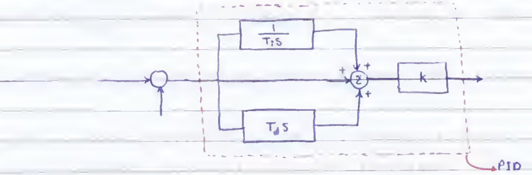


$$C(Z) = \frac{GR(Z)}{1 + HG(S)}$$

* محاسبه تابع تبدیل کنترل‌کننده PID دیجیتال :

در شکل آنالوگ $\quad m(t) = k\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt + T_d\frac{de(t)}{dt}\right]$





روش اول: فرض بر انتگرال گرفتن به روش ذوزنقه ای و مشتق گیری به روش تفاضل درنقطه ای:

$$* \; m(kT) \simeq k\left(e(kT)\right) + \frac{T}{T_i}\left(\frac{e(0)+e(T)}{2} + \frac{e(T)+e(2T)}{2} + \dots + \frac{e(k-1)T + ek(T)}{2}\right) + \dots$$

$$m(kT) \simeq k\left(e(kT)\right) + \frac{T}{T_i}\sum_{h=1}^{k}\frac{e((h-1)T)+e(hT)}{2} + \frac{T_d}{T}\left(e(kT)\right) - e((k-1)T)$$

$$\frac{e(h-1)T + e\,h(T)}{2} \simeq F(hT) \; ; \; F(0)=0$$ تعریف می‌کنیم:

$$Z\left(\sum_{h=0}^{k}\frac{e((h-1)T)+e(hT)}{2}\right) \longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}\left(F(z)-F(0)\right) \simeq \frac{F(z)}{1-z^{-1}}$$

$$\text{but}: \; F(z) \simeq Z\left(F(hT)\right) \simeq \frac{(1+z^{-1})}{2}E(z) \longrightarrow Z\left[\sum_{h=1}^{k}\frac{e((h-1)T)-e(hT)}{2}\right] \simeq \frac{1+z^{-1}}{2(1-z^{-1})}E(z)$$

$$M(z) \simeq k\left(1 + \frac{T}{2T_i}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{T_d}{T}(1-z^{-1})\right)E(z) \longrightarrow$$

$$k\left(1-\frac{T}{2T_i}\right) + \frac{T}{T_i}\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{T_d}{T}(1-z^{-1})\,E(z) \longrightarrow \left(K_p + \frac{K_I}{1-z^{-1}} + K_D(1-z^{-1})\right)E(z)$$

(برای شکل دوم)

$$\begin{cases} K_p \simeq k - \dfrac{K_I}{2T_i} \longrightarrow k - \dfrac{k_i}{2} \\ K_I \simeq \dfrac{kT}{T_i} \\ K_D \simeq k\dfrac{T_d}{T} \end{cases}$$

(برای شکل اول)

شکل بدست آمده برای کنترل کننده را (Positional Form) می‌نامیم:

روش دوم: برای شکل (Velocity Form) معیار تغییرات $M(kT)$ است که به عنوان مثال $\nabla m(kT)$ را در نظر می‌گیریم.

$$* \; \nabla m(kT) \simeq m(kT) - m((k-1)T) \longrightarrow k\left(e(kT) - e((k-1)T)\right) + \frac{T}{2T_i}\left(e(kT) + e(k-1)T\right) + \dots$$

$$K_p\left(e(kT) - e(k-1)T\right) + K_I\left(e(kT) + K_D(e(kT) + K_D\left(e(kT) - 2e((k-1)T) + e((k-1)T)\right.\right. \longrightarrow$$

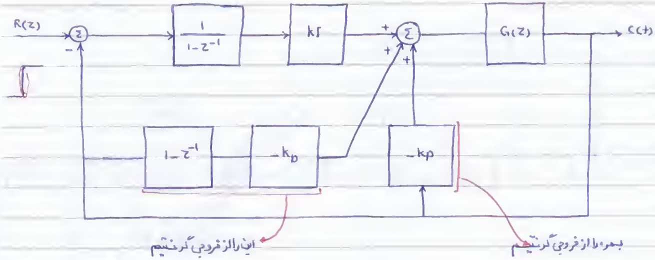
$$\nabla m(kT) \simeq K_p\left(r(kT) - r((k-1)T) - c(kT) + c((k-1)T)\right) + K_I\left(r(kT) - c(kT)\right) +$$

$$K_p\left(r(kT) - 2r((k-1)T) + r((k-2)T) - c(kT) + 2c((k-1)T) - c((k-2)\right.$$

اگر واحدهای شامل ۲ را در ضرائب (k_p و k_D) صرف نظر کنیم،

$$* \nabla_m(kT) \simeq -k_p\,(C(kT)-C((k-1)T) + kI\,(r(kT)-C(kT)) - k_D\,(C(kT)-2C((k-1)T) +$$

$$M(z) \simeq -k_p\,(C(z) + kI\,\frac{R(z)-C(z)}{1-z^{-1}} - k_D\,(1-z^{-1})\,C(z)$$



- derivative kick ← (مشتق را جابجا کردیم)
- Proportional kick ← (اثر جهش در خروجی را کاهش دادیم)

* پیاده‌سازی کنترل کننده ها (فیلترهای) دیجیتال:

فرم کلی کنترل کننده ها به صورت ذیل است:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \rightarrow \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

که مستند پیاده سازی تنها بلوک تأخیر

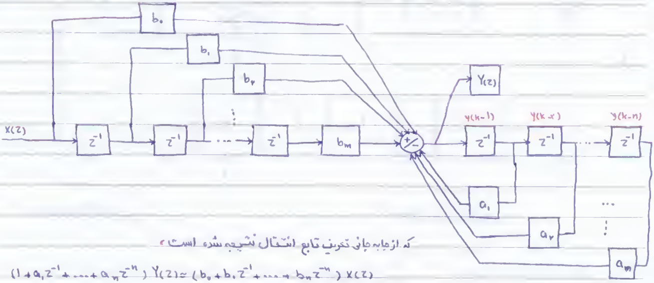
است.

به عنوان مثال برای کنترل کننده‌های PID داشتیم:

$$G_D(z) \simeq \frac{(k_P+k_I+k_D)-(k_P+2k_D)z^{-1}+k_Dz^{-2}}{1-z^{-1}} \longrightarrow \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

$a_1=-1$ ، $a_2=0$ ، $b_0=k_P+k_I+k_D$ ، $b_1=-(k_P+2k_D)$ ، $b_2=k_D$

Direct Programming
* پیاده‌سازی مستقیم:



که از جابه‌جایی تعریف تابع انتقال نتیجه شده است:

$$(1+a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n})\,Y(z)=(b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_nz^{-n})\,X(z)$$

* تعداد عناصر تأخیری استفاده شده در این روش $(m+n)$ است، معمولاً به جهت بالا بردن بازده حافظه از عناصر تأخیری کمتری استفاده می‌کنند، همچنین تعداد گره‌های جمع کننده می‌تواند معیاری برای انتخاب روش محاسبات باشد؛ سایر معیارها می‌تواند براساس خطای کوانتیزه شدن اطلاعات و ضرایب ها، انباشته خطا و مکان واقعی قطب‌ها و صفرها باشد.
این بدین منظور است که به دلیل کمبود حافظه میکروکنترلرها و میکروپروسسورها باعث می‌شود روش محاسبه در مقدار خروجی تأثیرگذار باشد، و نسبت به سیستم‌های کامپیوتری اعداد و ورودی متفاوتی بدست آید.

Standard Programming
* پیاده سازی استاندارد:

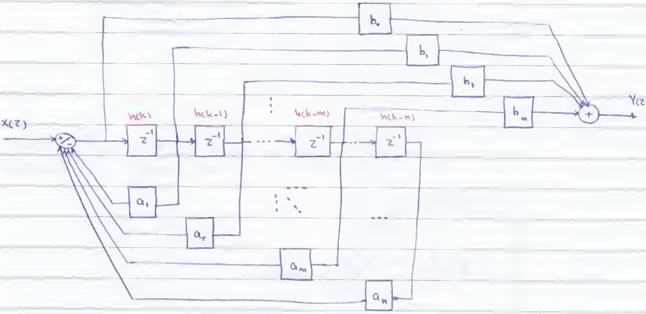
اگر رابطهٔ تابع انتقال را به صورت ذیل بازنویسی کنیم:

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{Y(z)}{H(z)}\cdot\frac{H(z)}{X(z)} \longrightarrow (b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_mz^{-m})\,\frac{1}{1+a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n}}$$

که می‌توان نوشت :

$$Y(z) = b_0 H(z) + b_1 z^{-1} H(z) + \dots + b_m z^{-m} H(z)$$

$$H(z) = X(z) - a_1 z^{-1} H(z) - \dots - a_n z^{-n} H(z)$$



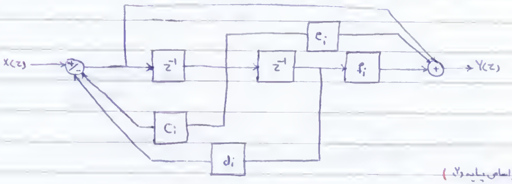
Series Programming

* پیاده سازی سری :

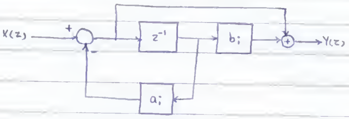
اگر تابع انتقال موردنظر را به بلوکهای کسری دلخواه تجزیه کنیم (خصوصاً بلوکهای پایه مرتبه ۱ و ۲)

$$G(z) = G_1(z)\, G_2(z) \dots G_p(z) \; ; \; G(z) = k \prod_{i=1}^{j} \frac{1+b_i z^{-1}}{1+a_i z^{-1}} \prod_{i=j+1}^{p} \frac{1+e_i z^{-1}+f_i z^{-2}}{1+c_i z^{-1}+d_i z^{-2}}$$

که در آن هر یک از بلوک ها را می‌توان مثلاً به روش استاندارد یا مستقیم یا هر روش دیگر پیاده سازی نمود.



(بلوکهای اساسی پایه ۲)

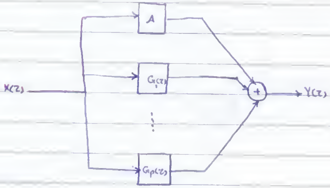


(بلوک‌ها براساس پلی‌ها)

Parallel Programming

* روش موازی :

$$G(z) \simeq A + G_1(z) + G_2(z) + \dots + G_q(z) \longrightarrow A + \sum_{i=1}^{j} \frac{b_i}{1 + a_i z^{-1}} + \sum \frac{c_i + f_i z^{-1}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}}$$



ladder Programming

* روش نردبانی :

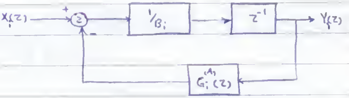
$$G(z) \simeq A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + \cfrac{1}{\ddots \, A_{n-1} + \cfrac{1}{B_n z + \cfrac{1}{A_n}}}}}}$$

بخش های پایه سازنده

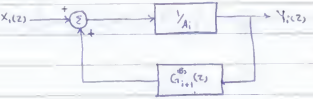
$$G_i^{(B)}(z) \simeq \frac{1}{B_i z + G_i^{A}(z)} \quad , \quad i \simeq 1, 2, \dots, n-1$$ (شکل اول)

$$G_i^{(A)}(z) \simeq \frac{1}{A_i + G_{i+1}^{(B)}(z)} \quad , \quad i \simeq 1, 2, \dots, n-1$$ (شکل دوم)

بخش حالت انتهایی $\rightarrow G_n^{(B)}(z) = \dfrac{1}{B_n z + \dfrac{1}{A_n}}$



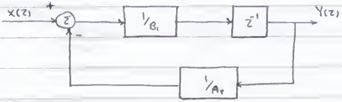
(شکل اول)



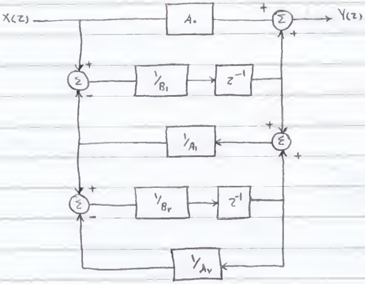
(شکل دوم)

به عنوان مثال اگر $n=2$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$G(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + \cfrac{1}{A_2}}}}$$



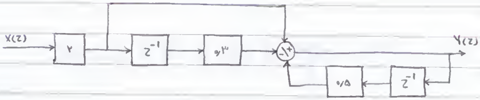
$$G_2(z) = \frac{1}{B_2 z + \frac{1}{A_2}} \rightarrow \frac{A_2}{1 + A_2 B_2 z}$$



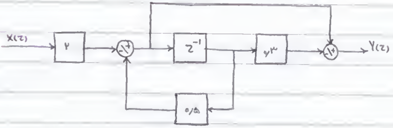
مثال ۶: تابع انتقال G(z) را به روش مستقیم و استاندارد پیاده سازی کنید.

$$G(z) = \frac{2 - 0.6 z^{-1}}{1 + 0.5 z^{-1}}$$

(Direct Programming)

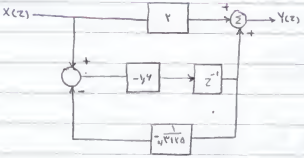


(Standard Programming)



مثال: تابع انتقال G(z) را در ذیل را به روش نردبانی پیاده سازی کنید.

$$G(z) = \frac{2z - 0.6}{z + 0.5} \rightarrow 2 + \frac{-1.6}{z + 0.5} \rightarrow 2 + \frac{1}{0.625 z + \frac{1}{-3.2}}$$



* فیلترها با پاسخ ضربه محدود و نامحدود:

Infiniti impulse Response filter (IIR)

Finite impulse Response filter (FIR)

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

$$y(k) = -a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) + b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m)$$

* پیاده‌سازی فیلتر با پاسخ ضربه محدود (FIR):

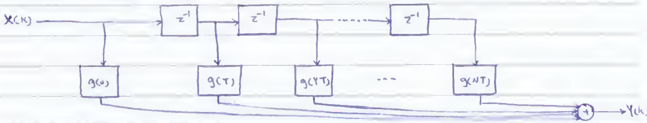
یک ایده برای بیان فیلتر، پاسخ ضربه آن است؛ بر این اساس اگر پاسخ ضربه را به صورت g(kT) و در اختیار داشته باشیم (رشته وزنی)

$$g(kT) \simeq \sum_{h=0}^{k} g(hT)\,x(kT-hT) \longrightarrow g(0)X(kT) + g(T)X((k-1)T) + \dots + g(kT)X(0)$$

که در آن x(kT) بصورت جمع کانولوشن بیان شده است، در شکل عملی نمی‌توان تمامی پاسخ g(kT) را در نظر گرفت، اگر برای این منظور تنها (N) مقدار متوالی پاسخ ضربه را در نظر بگیریم، آنگاه عملاً جمع کانولوشن را تنها برای (N+1) جمله یا مقدار ورودی نوشته‌ایم.

$$g(kT) \simeq g(0)X(kT) + g(T)x((k-1)T) + \dots + g(NT)X((k-N)T)$$

تبدیل Z : $Y(z) \simeq g(0)X(z) + g(T)z^{-1}X(z) + \dots + g(NT)X(z)z^{-N}$



* نکاتی که در مورد فیلتر FIR باید در نظر گرفت:

۱) این فیلتر غیر بازگشتی است، لذا (بدلیل عدم وجود فیدبک) انباشته خطا ناشی از مقادیر ذخیره شده قبلی وجود ندارد.

۲) بدلیل عدم وجود فیدبک، پیاده‌سازی مستقیم و استاندارد یکسان نیست؛ همچنین پیاده‌سازی می‌تواند بکمک کانولوشن سریع (FFT) انجام شود.

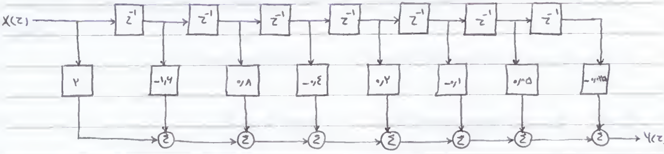
۳) قطبهای این فیلتر همگی در مبدأ هستند و لذا همواره پایدار است.

۴) اگر سیگنال ورودی حاوی فرکانسهای بالا باشد آنگاه تعداد عناصر تأخیر در بلوک (FIR) بالا می‌رود و در نتیجه تأخیر هم افزایش می‌یابد که نقطه ضعف (FIR) در مقابل (IIR) است.

مثال۴: فرض کنید تابع انتقال $G(z) \simeq \frac{2-0.6z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}$ را بخواهیم به صورت (FIR) پیاده سازی کنیم، که برای نمونه می‌توان به کمک تقسیمات متوالی یا هر روش دیگر رشته وزنی را محاسبه کنیم.

$$G(z) \simeq 2-1.6z^{-1}+0.8z^{-2}-0.4z^{-3}+0.2z^{-4}-0.1z^{-5}+0.05z^{-6}-0.025z^{-7}+\dots \longrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)}$$

که در این مثال اگر (N=7) در نظر بگیریم، چنین خواهد بود.



* نگاشت بین صفحات s و z:

نکته: فرکانس نمونه برداری:

در طراحی کنترلر فرکانس نمونه برداری اولین عاملی است که با آن برخورد می‌کنیم، که فرکانس نه خیلی زیاد باشد، چرا که سیستم باعث پیوسته بودن حالت می‌شود و سرعت فرکانس بالا می‌رود و خیلی کم نباشد که اساساً باعث ناپایداری سیستم شود؛ به عبارتی دیگر چون تأخیر داریم امکان دارد باعث ناپایداری شود.

دیده‌ایم که رابطهٔ z و s به صورت $z=e^{Ts}$ بیان شده است.

$$z=e^{Ts} \longrightarrow e^{T(\sigma+j\omega)} \longrightarrow e^{T\sigma}\, e^{Tj\omega} \longrightarrow \underbrace{e^{\sigma T}}_{\text{اندازه}}\ \underbrace{e^{j(T\omega+2k\pi)}}_{\text{(زاویه) فاز}}$$

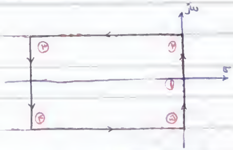
در این عبارت می‌بینیم که فرکانس هایی که به میزان ($\frac{2\pi}{T}$) متفاوت باشند بروی یک نقطه در صفحه z تصویر می‌شود، یعنی برای هر مقدار (z) می‌توان بی‌نهایت s معادل در نظر گرفت.

اگر بخش نیم صفحه دست چپ s را در نظر بگیریم: $\sigma<0 \longrightarrow |z|=e^{T\sigma}<1$

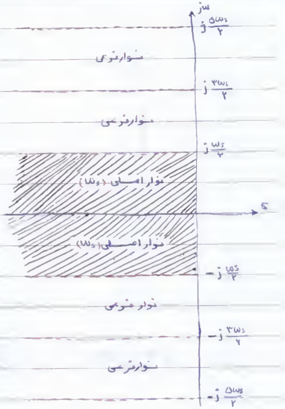
و در مورد $\sigma=0$ یعنی ($e^{0T}=1$) به معنی آنست که محور ($j\omega$) بروی دایره به مرکز مبدأ مختصات در صفحه z تصویر می‌شود و در نتیجه شرط پایداری سیستم برای سیستم‌های گسسته به صورت $|z|<1$ در نظر گرفته می‌شود.

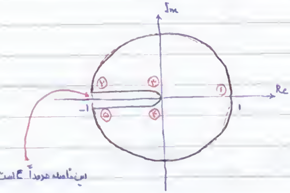
از آنجاکه تصویر از z به s یکتا نیست، لذا صفحه s به نوارهایی تقسیم می‌شود که در حالت اصلی هر نوار را در جهت مثلثاتی دور بزنیم مسیر متناظر آن در صفحه z مطابق تصویر مشاهده می‌شود.

Subject . Year. Month. Day.



صفحه S

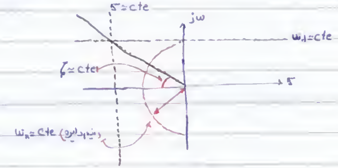




صفحه Z

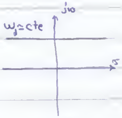
* نحوه تصویر مسیرهای رایج در صفحه S به Z :

تمام قطبهای که دارای $j\omega$ ثابت است، فرکانس میرایی ثابت ولی (Over Shot) آن تغییر می‌کند و تمامی قطبهای که دارای σ ثابت باشند دارای زمان نشست ثابت می‌باشند.

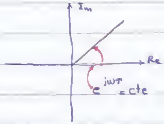


* خطوط σ ثابت : ($e^{T s}$)

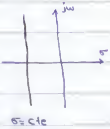
* خطوط ω_d ثابت : ($e^{j\omega T}$)



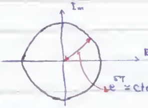
(صفحه S)



(صفحه Z)

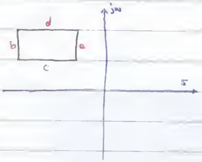


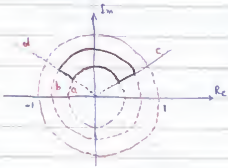
(صفحه S)



(صفحه Z)

* برای نمونه در شکل های دیگر در صفحه z ، Z نمایش داده شده است :

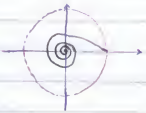


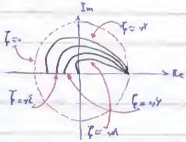


* خطوط ضریب میرایی ثابت :

$$S = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \longrightarrow -\zeta\omega_n + j\omega_d$$

$$Z = e^{TS} \longrightarrow e^{(-\zeta\omega_n T + j\omega_d T)} \longrightarrow e^{\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s} + j2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)} \longrightarrow |Z| = e^{\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)} \qquad \angle Z = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}$$

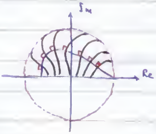




* خطوط ω_n ثابت :

برطبق اصول (Conformal maping) (نگاشت همدیسی) می توان مسیرهای ω_n ثابت را رسم نمود که برای اینکار کافیست نمودار ζ رسم شده

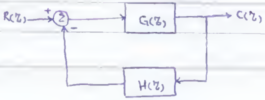
دراین صورت خط ω_n عمود بر ζ خواهد بود.



* پایداری در سیستم های حلقه بسته در صفحه Z :

$$\frac{C(Z)}{R(Z)} = \frac{G(Z)}{1+GH(Z)} \longrightarrow \frac{Q(Z)}{P(Z)}$$

قطبها از $P(Z) = 1 + GH(Z)$ معادله مشخصه بدست می آیند (ریشه ها)



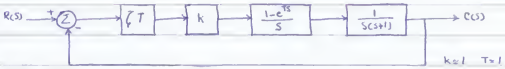
* قواعد پایداری :

۱) برای پایداری سیستم، قطبهای حلقه‌بسته (ریشه‌های معادله مشخصه) باید درون دایره واحد باشد، قطبها خارج دایره واحد منجر به ناپایداری می‌شوند.

۲) اگر قطب ساده‌ای در $z=1$ یا $z=-1$ (شامل هر دو می‌شود) قرار گیرد، سیستم پایدار مرزی است، همچنین اگر یک زوج قطب روی دایره واحد قرار گیرد، سیستم پایدار مرزی خواهد بود؛ هرگونه قطب مکرر روی دایره واحد سیستم را ناپایدار می‌کند.

۳) صفرهای حلقه‌بسته پایداری را متأثر نمی‌کند. پس محل آنها در صفحه z تأثیری روی پایداری ندارد.

مثال: برای سیستم ذیل پایداری را بررسی کنید.



$k=1 \quad T=1$

$$* \; G(s) = \frac{1-e^{Ts}}{s}\,\frac{1}{s(s+1)} \longrightarrow G(z) = Z\left(\frac{1-e^{Ts}}{s}\,\frac{1}{s(s+1)}\right) \longrightarrow G(z) = \frac{0.3679\,z + 0.2642}{(z-0.3679)(z-1)}$$

معادله مشخصه : $(z-0.3679)(z-1) + 0.3679\,z + 0.2642 = 0 \longrightarrow z^2 - z + 0.6321 = 0 \longrightarrow z_1 = 0.5 - j\,0.6181$, $z_2 = 0.5 + j\,0.6181$

* $|z|<1$ است پس سیستم حلقه‌بسته پایدار است

* روش (Jury) برای آزمون ریشه های سیستم حلقه‌بسته :

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

تعریف می‌کنیم،

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} , \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{3-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} , \quad k = 0, 1, 2$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} , \quad k = 0, \dots, n-2$$

(جدول در صفحه دیگر)

ردیف	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	....	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	a_{n-4}	....	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	....	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	b_{n-5}	....	b_2	b_1	b_0
4	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	....	b_{n-2}	b_{n-1}	b_n
⋮	⋮						⋮		
2n-4	p_0	p_1	p_2	p_3					
2n-3	q_2	q_1	q_0						

* شرط پایداری:

۱) $|a_n| < |a_0|$

۲) $P(z)\big|_{z=1} > 0$

۳) $P(z)\big|_{z=-1}$ > 0 for (n) even, < 0 for (n) odd

۴) $|b_{n-1}| > |b_0|$

$|c_{n-2}| > |c_0|$

⋮

$|q_2| > |q_0|$

مثال ۵: برای چند جمله‌ای های ذیل پایداری را بررسی کنید:

۱) $P(z) = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$

$a_0 = 1$ شرط اول $\rightarrow |a_4| < |a_0| \rightarrow 0/08 < 1$ ✓

$a_1 = -1/2$ شرط دوم $\rightarrow P(1) = 1 - 1/2 + 0/7 + 0/3 - 0/08 = 0/9 > 0$ ✓

$a_2 = 0/7$ شرط سوم $\rightarrow P(-1) = 1 + 1/2 + 0/7 - 0/3 - 0/08 = 1/89 > 0$ ✓

$a_3 = -0/3$

$a_4 = -0/08$

* جدول تحت در مثحه بعد قرار دارد.

Subject . Year. Month. Day.

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	-0.058	0.3	0.07	-1.2	1
2	1	-1.2	0.07	0.3	-0.058
3	-0.996	1.176	-0.754	-0.204	
4	-0.204	-0.754	1.176	-0.996	
5	0.946	-1.184	0.315		

$|b_3| = 0.996 > |b_0| = 0.204$ ✓

$|c_2| = 0.946 > |c_0| = 0.315$ ✓

(پس سیستم با این معادله مشخصه پایدار است)

۲) $P(z) = z^3 - 1.3z^2 + 0.08z + 0.24$

$|a_3| < |a_0|$ ✓

$P(1) = 1 - 1.3 - 0.08 + 0.24 = -0.14$ ✗ (پس سیستم ناپایدار است)

۳) $G(z) = \dfrac{k(0.3679z + 0.2642)}{(z - 0.3679)(z - 1)}$

حلقه بسته $\longrightarrow \dfrac{C(z)}{R(z)} = \dfrac{k(0.3679z + 0.2642)}{z^2 + (0.3679k - 1.3679)z + 0.3679 + 0.2642k} \longrightarrow$ معادله مشخصه $P(z) = 0$

$|a_2| < |a_0| \longrightarrow |0.3679 + 0.2642k| < 1 \longrightarrow 2.3925 > k > -5.1775$

$P(1) = 1 + (0.3679k - 1.3679) + 0.3679 + 0.2642k > 0 \longrightarrow k > 0$

$P(-1) = 1 - (0.3679k - 1.3679) + 0.3679 + 0.2642k > 0 \longrightarrow 0 < k < 26.3925$

* نتیجه نهایی:

برای $k = 2.3925$ سیستم پایدار مرزی است (نوسانات پایداری) که فرکانس آن از طریق قراردادن k در محاسبه ریشه معادله ($z^2 - 0.4872z + 1 = 0$) بدست می‌آید.

$z = 0.2439 \pm j\,0.9698$

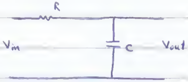
با توجه $T = 1$ پس ($\omega_d = \dfrac{\omega_s}{2\pi} \angle z$) پس ($\omega_d = 1.3244 \ \frac{rad}{s}$)

* روش روث هرویتز اصلاح شده:

اگر در عبارت $P(z)$ به جای (z)، $z = \dfrac{w+1}{w-1} \longleftarrow$ ($w = \dfrac{z+1}{z-1}$) قرار دهیم، که دایره واحد از صفحه z را به نیم صفحه سمت چپ صفحه w تصویر کند، می‌توان از روش روث هرویتز استفاده کرد.

* طراحی سیستم‌های گسسته زمان به کمک روش‌های تبدیل :

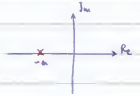
ب) بدست آوردن معادل گسسته سیستم پیوسته :



نکته : در بخش‌های ذیل بر روی مثال

$$\frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{1}{RCS+1} \rightarrow \frac{a}{S+a}$$

که معادل دیفرانسیل آن $\left(\frac{dy}{dt} + ay = ax\right)$ مقایسه انجام می شود .



۱) روش تفاضلی پس رو :

$$\frac{dy}{dt} = -ay + ax \longrightarrow \int_0^t \frac{dy(t)}{dt}\,dt = -a\int_0^t y(t)\,dt + a\int_0^t x(t)\,dt$$

حال داریم :

$$y(kT) - y(0) = -a\int_0^{kT} y(t)\,dt + a\int_0^{kT} x(t)\,dt$$

به جای t مقدار kT را می گذاریم در این صورت داریم

همچنین برای یک های پریود قبل :

$$y((k-1)T) - y(0) = -a\int_0^{(k-1)T} y(t)\,dt + \int_0^{(k-1)T} x(t)\,dt \longrightarrow$$

از ترکیب در معادله فوق $\longrightarrow$ $y(kT) - y((k-1)T) = -a\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)\,dt + a\int_{(k-1)T}^{kT} x(t)\,dt$

اگر مقدار انتگرال را در مدت انتگرال تقریباً ثابت فرض کنیم :

$$y(kT) = y((k-1)T) - aT\,(y(kT) - X(kT)) \longrightarrow y(z) = z^{-1}y(z) - aT\,(y(z) - X(z)) \longrightarrow$$

$$\frac{y(z)}{x(z)} = G_D(z) \longrightarrow \frac{aT}{1-z^{-1}+aT} \longrightarrow \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{T}+a}$$

* نتیجه می گیریم که در این روش در تبدیل لاپلاس بجای S مقدار $\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)$ را قرار می دهیم :

$$S = \frac{1-z^{-1}}{T}$$

در این صورت ناحیه پایداری در حوزه پیوسته نیم صفحه سمت چپ به دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$

و به مرکز $(\frac{1}{2}, 0)$ تصویر می‌شود و دلیل آنست که

$$Re\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right) < 0 \longrightarrow \frac{\sigma^2-\sigma+w^2}{\sigma^2+w^2} < 0 \longrightarrow (\sigma^2-\tfrac{1}{2})^2 + w^2 < (\tfrac{1}{2})^2$$

این روش ساده است و از سیستم پایدار پیوسته به سیستم پایدار گسسته منجر می‌شود، امّا اعوجاج در پاسخ گذرا رویت می‌گردد؛ بطوری که امکان دارد قطبهای مورد نظر در نقطه مورد نظر و ناحیه بدست آمده نباشد.

۲) روش تفاضلی پیش‌رو:

با مقایسه با فرایند طی شده در بخش قبلی (تفاضل پس‌رو) خواهیم داشت:

$$y(kT) \rightarrow y((k-1)T) - aT\,(y((k-1)-T)) - x((k-1)T)) \rightarrow$$

$$y(kT) = (1-aT)\,y((k-1)T) + aT\,x((k-1)T) \rightarrow y(z) = (1-aT)z^{-1}y(z) - aT\,z^{-1}x(z) \rightarrow$$

$$\frac{y(z)}{x(z)} = G_D(z) \rightarrow \frac{aTz^{-1}}{1-(1-aT)z^{-1}} \rightarrow \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}+a}$$

* در این روش نیز به جای s مقدار $\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}$ را قرار می‌دهیم؛

این روش نیز مشکل دارد و اینست که امکان دارد سیستم بدست آمده از این روش ناپایدار باشد.

$$R(z)<1 \rightarrow Re\left(\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}\right)<0$$

۳) روش تبدیل (Tustin) دوخطی یا انتگرال ذوزنقه‌ای:

که به جای $\int_{(k-1)T}^{kT} u(t)dt$ می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}(u(kT)+u((k-1)T))$$

$$y(kT) = y((k-1)T) - \frac{aT}{2}(y(kT)+y((k-1)T)) + a\frac{T}{2}(x(kT)+x(k-1)T) \rightarrow$$

$$y(z) = z^{-1}y(z) - a\frac{T}{2}(y(z)+z^{-1}y(z)) + a\frac{T}{2}(x(z)+z^{-1}x(z)) \rightarrow$$

$$\frac{y(z)}{x(z)} = G_D(z) \rightarrow \frac{a\frac{T}{2}(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})+\frac{aT}{2}(1-z^{-1})} \rightarrow \frac{a}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+a}$$

* در این صورت در تبدیل لاپلاس کافیست $(\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})$ را نوشت؛

و این بدان معنی است که شامل دایره واحد می شود؛

ناحیه پایداری $\longrightarrow Re(\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})<0 \longrightarrow \sigma^2+\omega^2<1$

ب) در این روش ولذا این تبدیل از سیستم پیوسته پایدار به سیستم گسسته پایدار می رسیم؛ و همچنین محور $j\omega$ در حوزه پیوسته بر روی محیط دایره واحد در حوزه گسسته تصویر می شود؛ اما توجه شود که نسبت به $(z=e^{Ts})$ روی هم نمی نشینند؛ ولذا اعوجاج در پاسخ وجود خواهد داشت.

۴) روش تبدیل دوخطی (Frequency Prewarping):

* بررسی رابطهٔ دو فرکانس در حوزه های پیوسته و گسسته:

$$S=j\omega_a \;،\; z=e^{Tj\omega_d} \longrightarrow S=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \longrightarrow j\omega_a=\frac{2}{T}\frac{1-e^{-Tj\omega_d}}{1+e^{-Tj\omega_d}} \longrightarrow$$

$$\frac{2}{T}\frac{e^{j\omega_d\frac{T}{2}}-e^{-j\omega_d\frac{T}{2}}}{e^{j\omega_d\frac{T}{2}}+e^{-j\omega_d\frac{T}{2}}}$$

(فرکانس مورد نظر در حوزه پیوسته)

$$j\omega_a=\frac{2}{T}\frac{2j\sin(\omega_d\frac{T}{2})}{2\cos(\omega_d\frac{T}{2})} \longrightarrow j\frac{2}{T}\tan(\omega_d\frac{T}{2}) \longrightarrow \omega_a=\frac{2}{T}\tan(\omega_d\frac{T}{2})$$

* می توان گفت که اگر $(\omega_d T)$ کوچک باشد:

$$\omega_d T=\frac{2\pi}{\omega_s}\ll 1 \longrightarrow \frac{\omega_d}{\omega_s}\ll\frac{1}{2\pi} \longrightarrow \omega_a\simeq\frac{2}{T}\omega_d\frac{T}{2} \longrightarrow \omega_a\simeq\omega_d$$

ب) لذا، در اینجا با در نظر گرفتن فرکانس ویژه که معمولاً فرکانس قطع گوشه (افت 3db-) است، پاسخ فرکانسی در حوزه گسسته و پیوسته را تنظیم می کنیم؛ و سپس تبدیل دوخطی را انجام دهیم.

مثال: برای یک فیلتر پایین گذر $G(s)$ روابط فرکانسی را بدست آورید:

$$G(s)=\frac{a}{s+a} \longrightarrow G'(s)=\frac{\frac{2}{T}\tan\frac{aT}{2}}{s+\frac{2}{T}\tan\frac{aT}{2}} \longrightarrow$$

تبدیل دوخطی: $G_D(z)=\dfrac{\frac{2}{T}\tan\frac{aT}{2}}{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+\frac{2}{T}\tan\frac{aT}{2}}$

Subject . Year. Month. Day.

$$G_D(z) = \frac{\tan\frac{aT}{2}}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \tan\frac{aT}{2}}$$

* که همین رابطه برای فیلتر بالاگذر $H(s) = \frac{s}{s+a}$ که بازهم فرکانس قطع (a) است، داریم:

$$H(z) = \frac{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \tan\frac{aT}{2}}$$

۵) روش پاسخ ضربه ثابت:

ب) به گونه‌ای تبدیل می‌کنیم که پاسخ ضربه‌ها معادل باشد.

$$g_D(kT) = T\,g(t)\Big|_{t=kT} \longrightarrow G_D(z) = \mathcal{Z}\left(Tg(t)\right) = TG(z)$$

برای نمونه برای فیلتر قبلی داریم:

$$G_D(z) = TG(z) \longrightarrow \frac{Ta}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

نکته: این روش نیز به روش تبدیل Z مرسوم است چون از تبدیل Z بدست می‌آید. دیده ایم که در این حالت پاسخ فرکانسی حوزه گسسته شامل پاسخ فرکانسی حوزه پیوسته به اضافه بینهایت کپی های آن است و لذا تداخل فرکانسی می‌تواند رخ دهد. (alias)

۶) روش پاسخ پله ثابت:

$$\mathcal{Z}^{-1}\Big(\overbrace{G_D(z)\frac{1}{1-z^{-1}}}^{\text{پاسخ پله در حوزه گسسته}}\Big) \longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\Big(\underbrace{G(s)\cdot\frac{1}{s}}_{\text{پاسخ پله در حوزه پیوسته}}\Big)\Big|_{t=kT} \longrightarrow$$

تبدیل Z می‌گیریم: $G_D(z)\frac{1}{1-z^{-1}} \longrightarrow \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(G(s)\frac{1}{s}\right)\right) \longrightarrow \mathcal{Z}\left(\frac{G(s)}{s}\right) \longrightarrow$

$$G_D(z) = 1-z^{-1}\,\mathcal{Z}\left(\frac{G(s)}{s}\right) \longrightarrow \mathcal{Z}\left(\frac{1-e^{Ts}}{s}G(s)\right)$$

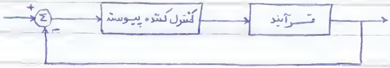
* که عبارت آخر معادل سیستم پیوسته به اضافه نمونه برداری و نگهدار مرتبه صفر است و از سیستم پایدار به پایداری رسیم.

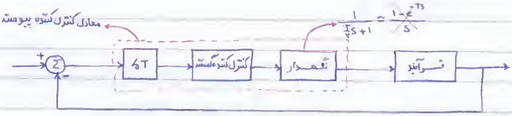
۷) روش انتقال قطب‌ها و صفرها:

در این روش تابع را به صورت حاصل ضرب ترم‌های مرتبه اول در می‌آوریم و برای هر ترم به صورت $(s+a_i)$ یعنی $(s=-a_i)$ با فرض $(z=e^{Ts})$ به $(z=e^{-a_iT})$ تصویر می‌شود.

* توجه شود که صفرهای بینهایت به $(z=-1)$ تصویر می‌شود، ضمناً پس از تصویر کردن بهره را نیز باید تنظیم نمود.

* طراحی کنترل کننده براساس بدست آوردن معادل گسسته کنترل کننده پیوسته:



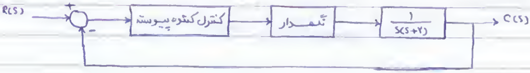


(تقریب قابل استفاده برای e^{-Ts}) $\longrightarrow$ $e^{-Ts} \simeq \dfrac{1-\frac{Ts}{2}+\frac{(Ts)^2}{8}+\cdots}{1+\frac{Ts}{2}+\frac{(Ts)^2}{8}+\cdots} \longrightarrow e^{-Ts} \simeq \dfrac{1-\frac{Ts}{2}}{1+\frac{Ts}{2}}$

* اما چون بهره DC باید یک باشد به جای $\left(\frac{1}{\frac{T}{2}s+1}\right)$ می گذاریم:

$$\frac{1-e^{-Ts}}{s} = \frac{T}{\frac{T}{2}s+1}$$

مثال: برای سیستم ذیل یک کنترلر کننده گسسته طراحی شود که ($t_s = ۲^s$ و $\zeta = ۰/۵$) باشد:



* پس قطبهای غالب حلقه کنترل شده $W_d = ۳/۴۶۴$ ، $W_n = ۴$ ، $f_n = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$ (فرکانس هدف) و در نتیجه $T_n = \frac{\pi}{2}$ (پریود غالب قطب حلقه)

(معمولاً فرکانس نمونه برداری بین ۵ تا ۱۰۰ برابر فرکانس قطع حلقه بسته می باشد) (f_s حدوداً ۵ تا ۱۰۰ برابر f_n است)

$T_n \gg T \rightarrow T = ۰/۲^s$

$$G(s) \simeq k\,\frac{s+2}{s+4}$$

نکته: در صورتی که حلقه بسته از فرایند تند تر باشد، جبرانساز (Lead) استفاده می شود و اگر حلقه بسته از فرایند کندتر باشد (وها) استفا می شود که در این حالت صفر جبوتر از قطب است پس قطب غالب است، ولی در حالت (Lead) سیستم اعمالی جبرانساز غالب است.

* اینک به کمک روش انتقال صفرها و قطبها کنترل کننده را به حوزه گسسته می‌بریم :

$$s=-4 \longrightarrow z=e^{-4} \simeq 0.449$$

$$s=-2 \longrightarrow z=e^{-2T} \simeq 0.6703$$

برای بهره DC : $K \simeq 13.57 \longrightarrow G_D(z) = 13.57\left(\dfrac{z-0.6703}{z-0.449}\right)$

* این روش مناسب نیست چرا که امکان دارد باعث ناپایداری شود .

* بررسی پاسخ حالت دائم :

$$e(t) = r(t) - b(t)$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) \longrightarrow \lim_{k\to\infty} e(kT) \longrightarrow \lim_{z\to 1} \left((1-z^{-1})E(z)\right)$$

اگر تعریف کنیم :

$$G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left(\frac{G_p(s)}{s}\right)$$

$$GH(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left(\frac{G_p(s)H(s)}{s}\right) \longrightarrow \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+GH(z)} \quad : \quad E(z) = R(z) - B(z) \longrightarrow R(z) - GH$$

$$E(z) = \frac{1}{1+GH(z)}R(z) \quad ; \quad e_{ss} = \lim_{z\to 1}\left((1-z^{-1})\frac{1}{1+GH(z)}R(z)\right)$$

* static position error constant :

$$e_{ss} = \lim_{z\to 1}\left((1-z^{-1})\frac{1}{1+GH(z)}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}\right) \longrightarrow \lim_{z\to 1}\frac{1}{1+GH(z)}$$

تعریف می‌کنیم :

$$k_p = \lim_{z\to 1} GH(z) \longrightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+k_p} \ *$$

Subject . Year. Month. Day.

* Static Velocity error Constant :

$$R(z)=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\ ;\quad e_{ss}=\lim_{z\to1}\left((1-z^{-1})\frac{1}{1+GH(z)}\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right)\longrightarrow \lim_{z\to1}\frac{T}{(1-z^{-1})GH(z)}$$

تعریف می کنیم:

$$K_v=\lim_{z\to1}\frac{1-z^{-1}}{T}GH(z)\longrightarrow e_{ss}=\frac{1}{K_v}$$

* static acceleration error Constant :

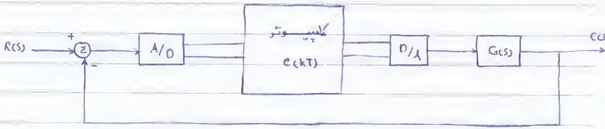
$$R(z)=\frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3}\ ;\quad e_{ss}=\lim_{z\to1}\left((1-z^{-1})\frac{1}{1+GH(z)}\frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3}\right)\longrightarrow \lim_{z\to1}\frac{T^2}{(1-z^{-1})GH(z)}$$

تعریف می کنیم:

$$K_a=\lim\frac{(1-z^{-1})GH(z)}{T^2}\longrightarrow e_{ss}=\frac{1}{K_a}$$

* باید معمولاً با حالت تحلیلی و آن هم به صورتی که غالب باشد آن را بدست می آید؛ برای محاسبه تابع انتقال موردنظر؛
پس برای شناسایی مشخصه درصورتی که به صورت بلوک باشد می توان آن را ورودی ضربه (که معمولاً عملی نیست) و یا ورودی پله اعمال کرد که
در این حالت رابطهٔ ورودی و خروجی همان تابع انتقال است.

نکته: درهنگام کنترل کردن سیستم ما همواره تابع انتقال را داریم؛ و از روی آن فرآیند سیستم را کنترل می کنیم؛ برای نمونه در حالت کنترل دیجیتال داریم؛



مثال: طراحی براساس مکان هندسی ریشه ها درحوزه گسسته، برای تابع انتقال یک سیستم که داریم:

$$G(s)=\frac{1}{s(s+2)}$$

واحد $(\sigma , \omega_d) \simeq \text{rad}/s$

امداف کنترل خطی پیوسته:

$$t_s = 2^s \quad : \quad t_s=\frac{4}{\sigma} \longrightarrow \sigma = 2\ \text{rad}/s$$

$$\sigma = \zeta \omega_n \longrightarrow \omega_n \simeq 4\ \text{rad}/s$$

$$\zeta = 0.5 \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \longrightarrow \omega_d = 3.464\ \text{rad}/s$$

فرض کنیم پریود نمونه برداری:

$$T=0.25 \longrightarrow \omega_s \simeq 10\pi \simeq 31.41$$

نکته: برای بدست آوردن (ω_s) کافیست ۱۰ تا ۲۰ برابر (ω_n) را محاسبه کنیم و در این صورت برای (f_s) داریم:

$$\omega_s = 2\pi f_s \longrightarrow f_s = \frac{\omega_s}{2\pi}$$

اگر در مدار قطب مختلط غالب وجود داشته باشد، باید فرکانس مورد نظر را بیشتر در نظر بگیریم تا اثر آن قطبها کمتر شود.

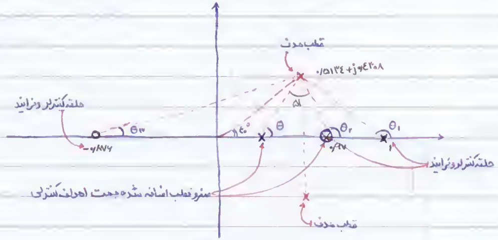
امداف کنترل گسسته:

$$|z| = e^{-T\sigma} \longrightarrow e^{-T\zeta\omega_n} \longrightarrow |z| = 0.9753$$

$$\measuredangle z = T\omega_d \longrightarrow \measuredangle z \simeq 0.6928\ \text{rad} \longrightarrow 39.69^\circ \simeq 40^\circ$$

$$z = 0.5134 \pm j$$

$$G(z)=\mathcal{Z}\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\,\frac{1}{s(s+2)}\right) \longrightarrow G(z)=(1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left(\frac{1}{s^2(s+2)}\right) \longrightarrow G(z)=0.017\,\frac{z+0.876}{(z-1)(z-0.67)}$$



* یا باید یک صفر اضافه شود و یا باید یک صفر و قطب اضافه شود تا تفاوت زاویه ۵۱ درجه شود:

جمع زوایا $\longrightarrow \underset{\theta_3}{17.1^\circ} - \underset{\theta_2}{138.52^\circ} - \underset{\theta_1}{109.82^\circ} \simeq -231.24^\circ - (-180) \simeq -51$

$$G_D(z) = k\,\frac{z+\alpha}{z+\beta} \longrightarrow k\,\frac{z-0.67}{z-0.17}$$

* برای محاسبه قطب تابع هدف اضافه‌شده داریم:

$0.5134 - 0.3488 \simeq 0.1646 \longrightarrow$ فاصله قطب اضافه شده

$\tan\theta = \dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \longrightarrow \text{ضلع مقابل} = \tan\theta \times \text{ضلع مجاور} \longrightarrow x = \dfrac{0.4308}{\tan 51^\circ} \longrightarrow x \simeq 0.3488$

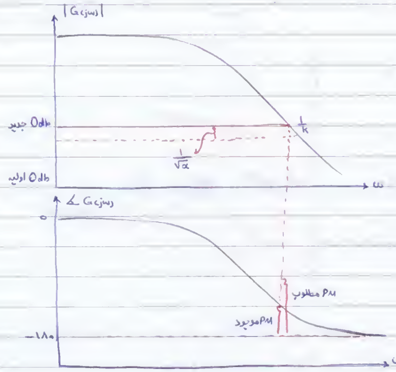
$k = \dfrac{\text{حاصلضرب فاصله تا قطب‌ها}}{\text{حاصلضرب فاصله تا صفرها}}$

* همواره در مکان هندسی قطبها به سمت صفر کشیده می‌شود، پس در صورتی صفر در سمت راست صفحه Z باشد، باعث می‌شود در بهره k زیاد، قطب به سمت راست تمایل پیدا کند و باعث ناپایداری سیستم شود.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 12.47\,\frac{1-0.67z^{-1}}{1-0.25z^{-1}} \longrightarrow y(k) - 0.25\,y(k-1) = 12.47\,(x(k) - 0.67\,x(k-1))$$

* همواره در مسائل سعی می‌شود به صورت پله بیان شود و نکات حائز اهمیت برای سیستم t_r ، t_s ، t_p مهم است.

* طراحی سیستم براساس پاسخ فرکانسی:



اهداف کنترلی:
- e_{ss}
- پارامترهای (t_s ، t_r)
- P.O (نوسان)

* هرگاه بیان می‌شود برای مثال ($t_s < 1^s$) دلیل نمی‌شود، که مقدار آن را برای مثال (1^{ms}) در نظر گرفت؛ چراکه هم فرایند را دچار مشکل می‌شود و هم سیستم را مختل می‌کنیم، که برای مثین برای کاهش خطای ماندگار بهره را معمولاً افزایش نمی‌دهیم، چراکه پهنای باند افزایش و در مقابل سرعت سیستم افزایش می‌یابد که در این حالت باز هم باعث اختلال در سیستم می‌شود.

برای کاهش خطای ماندگار سعی می‌شود از انتگرال‌گیر استفاده شود یعنی مانند جبرانساز (پس‌فاز) که در آن قطب غالب بر صفر است و این برای حالت ورودی پله است.

نکته: البته اگر فرایند داشته باشد نیاز به قرار دادن در کنترلر نیست و در صورتی که فرایندی نیست آن را در کنترلر طراحی می‌کنیم و به عبارتی برای کاهش خطای (e_{ss}) به ورودی پله می‌توان یک قطب ($1-z^{-1}$) در مخرج کسر اضافه کرد.

* پس می‌توان گفت سرعت بیش از حد در مباحث کنترلی مضر است.

برای مرتبه دوم $t_r \simeq \frac{0.8+2.5\zeta}{\omega_n}$ $\qquad t_s = \frac{4}{\omega_n \zeta}$

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \longrightarrow M_P \simeq P.O = 100\, e^{-\frac{\pi}{\tan\theta}}$$

(Percent overshoot)

گین (DC) انتگرال‌گیر بی‌نهایت است یعنی داریم:

انتگرال‌گیر Lag $\longrightarrow \frac{s+\beta}{s+\alpha}$ $\qquad \frac{\beta}{\alpha} > 1$

مشتق‌گیر Lead $\longrightarrow \frac{\alpha \tau s+1}{\tau s+1}$ $\qquad B.W = \omega_n\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{4\zeta^4-4\zeta^2+2}} \longrightarrow$ If $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ B.W =

* باید مقدار پهنای باند مطلوب در نظر گرفته شود، اگر پهنای باند زیاد باشد سرعت زیاد دارد؛ در مقابل هرچه پهنای باند کمتر باشد سرعت سیستم کند است که در حالت بهره یک یا 0db مد نظر است.

* پس در حالت کندی سرعت می‌توان با افزایش K مقدار آن را افزایش داد؛ $\qquad$ تقریباً $PM = 100\zeta$ سیستم مرتبه دوم

* هنگامی که از (پیش‌فاز) استفاده شود باعث می‌شود با تغییر خط (0db) بلند شود، پهنای باند مورد نظر تامین شود.

$\varphi_m \simeq PM_{(\text{موجود})} - PM_{(\text{مطلوب})}$

میزان فاز مورد نظر $\qquad \alpha = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$; $\quad T = \frac{1}{\omega_n\sqrt{\alpha}}$

* برای طراحی (پس‌فاز) کافیست از صفر (پیش‌فاز) به عقب حرکت کنیم به اندازهٔ (دهه) و صفر آن را قرار دهیم و بعد به اندازهٔ ($\frac{\beta}{\alpha}$) می‌توان قطب آن را قرار دهیم.

* طراحی براساس پاسخ فرکانسی :

نخست رفتار یک سیستم گسسته را در حوزه فرکانسی بررسی می‌کنیم:

* $u(t)=\sin(\omega t) \longrightarrow u(k)=u(kT)=\sin \omega kT$

$$U(z)=\mathcal{Z}(\sin \omega kT) = \frac{z\sin(\omega T)}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})} \longrightarrow X(z)=G(z)U(z) \longrightarrow \frac{z\sin(\omega T)}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})} \longrightarrow$$

$\frac{az}{z-e^{j\omega T}}+\frac{\bar a z}{z-e^{-j\omega T}} +$ (جملات ناشی از $G(z)$) $\longrightarrow$

* اگر رابطه را در $\left(\frac{z-e^{j\omega T}}{z}\right)$ ضرب کنیم در این صورت داریم:

$G(z)\frac{\sin(\omega T)}{z-e^{-j\omega T}} = a + \frac{\bar a(z-e^{j\omega T})}{z-e^{-j\omega T}} + \frac{z-e^{j\omega T}}{z}$ جملات ناشی از $G(z)$ $\longrightarrow$

* حال اگر $z \longrightarrow e^{j\omega T}$ قرار دهیم در این صورت داریم:

$a = G(z)\frac{\sin(\omega T)}{z-e^{-j\omega T}}\Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{G(e^{j\omega T})}{2j}$ (جمله دوم و سوم سمت راست به صفر میل می‌کند چون $z=e^{j\omega T}$)

$\bar a = \frac{G(e^{-j\omega T})}{2j}$

* اگر تعریف کنیم:

$G(e^{j\omega T}) = Me^{j\theta} \longrightarrow G(e^{-j\omega T}) = Me^{-j\theta} \longrightarrow X(z) = \frac{Me^{j\theta}}{2j}\frac{z}{z-e^{j\omega T}} - \frac{Me^{-j\theta}}{2j}\frac{z}{z-e^{-j\omega T}} +$ جملات $G(z)$

$\frac{M}{2j}\left(\frac{e^{j\theta}z}{z-e^{j\omega T}} - \frac{e^{-j\theta}}{z-e^{-j\omega T}}\right) +$ (جملات ناشی از $G(z)$) $\longrightarrow$

$\mathcal{Z}$ عکس تبدیل $\longrightarrow x(kT)=\frac{M}{2j}(e^{jk\omega T}e^{j\theta} - e^{-jk\omega T}e^{-j\theta}) + \mathcal{Z}^{-1}$ (جملات ناشی از $G(z)$) $\longrightarrow$

پس از آنجا که جملات ناشی از $\mathcal{Z}^{-1}(G(z))$ در نهایت به صفر میل می‌کند؛ با فرض $G(z)$ پایدار در حالت دائمی داریم:

$$x_{ss}(kT) = \frac{M}{2j}\left(e^{j(k\omega T+\theta)} - e^{-j(k\omega T+\theta)}\right) = M\sin(k\omega T+\theta)$$

* که در آن (M) بهره سیستم گسسته، در معرض ورودی سینوسی و θ فاز تغییر یافته پاسخ سینوسی نسبت به ورودی سینوسی است:

$$M = M(\omega) = |G(e^{j\omega T})|$$

$$\theta = \theta(\omega) = \angle G(e^{j\omega T})$$

$$Z = e^{j\omega T}$$

مثال: برای معادلات ذیل دامنه و فاز آن را بدست آورید.

$$x(kT) = u(kT) + \alpha x((k-1)T) \qquad 0<\alpha<1 \qquad u(kT) = A \sin \omega Tk$$

$$X(z) = U(z) + a z^{-1} X(z) \rightarrow$$

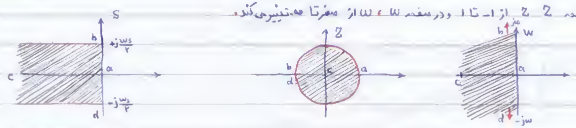
$$G(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{1}{1-az^{-1}} \xrightarrow{z \rightarrow e^{j\omega T}} G(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1-a e^{-j\omega T}} \rightarrow \frac{1}{1-a\cos\omega T + j\sin\omega T} \rightarrow$$

$$|G(e^{j\omega T})| = M = \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega T}} \qquad \angle G(j\omega T) = \theta = -\tan\frac{a\sin\omega T}{1-a\cos\omega T}$$

* پس از شناختن تابع پاسخ فرکانسی گسسته، موضوع دیگری با اهمیت‌تر قرار گیرد: در حوزه پیوسته برای سیستمهای خطی پاسخ فرکانسی را بررسی کرده و مثلاً به صورت نمودار بود (Bode) یا امثال آن را رسم و تحلیل می‌کنیم. در تبدیل Z که ناحیه پایداری دایره واحد است قواعد به صورت متفاوت در نظر گرفته می‌شود.

— برای استفاده از روشهای قدیمی (مورد استفاده در سیستمهای خطی پیوسته) به کمک تبدیل دوخطی نخست سیستم را به حوزه دیگری که شباهت به حوزه S دارد برده و سپس این حوزه را نمودار بود یا انواع دیگری را رسم می‌کنیم، تبدیل دوخطی به صورت ($Z = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}$) و ($w = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$) است. این تبدیل نوار اصلی حوزه S را مجدداً به نیم صفحه سمت چپ حوزه (w) انتقال می‌دهد.

(+) توجه شود که مبدأ مختصات Z به ($w = \frac{-2}{T}$) در صفحه w تصویر می‌شود، همچنین توجه شود که در صفحه S، ω_s از ۰ تا $\frac{\omega_s}{2}$ در صفحه Z، Z از ۱- تا ۱ و در صفحه w، ω_w از صفر تا ∞ تغییر می‌کند.

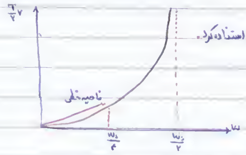


* رابطهٔ بین V (بخش موهومی W) و ω (فرکانس حوزه پیوسته) چنین است؟

* $$W\Big|_{w=jv} = jv = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}\Big|_{z=e^{j\omega T}} \longrightarrow \frac{2}{T}\,\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1} \longrightarrow \frac{2}{T}\,\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}-e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{e^{j\omega\frac{T}{2}}+e^{-j\omega\frac{T}{2}}} \longrightarrow$$

$$\frac{2}{T}\,j\tan\frac{\omega T}{2} \longrightarrow v = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_1 T}{2}$$

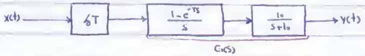
(پیچاندن در حوزه W)



ب) اگر ωT خیلی کوچک باشد (v=ω) را داریم، اما در مقادیر بالاتر باید از رابطهٔ فوق استفاده کرد.

$$\lim_{\omega\to 0} G(\omega) = \lim_{s\to 0} G(s)$$

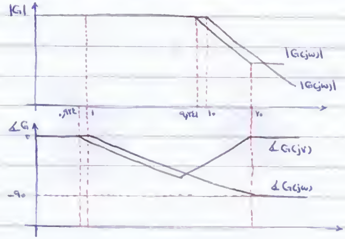
مثال: پاسخ فرکانسی سیستم ذیل را بدست آورید؟ (T=۰٫۱ s)



* $$G(z) = Z\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{10}{s+10}\right) \longrightarrow (1-z^{-1})\,Z\left(\frac{10}{s(s+10)}\right) \longrightarrow \frac{0.6321}{z-0.3679}$$

$$z = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} \longrightarrow \frac{1+0.05w}{1-0.05w} \longrightarrow G(w) = 9.241\,\frac{1-0.05w}{w+9.241}$$

* توجه شود که قطب در صفحه S در ۱۰- بود که در صفحه W به ۹٫۲۴۱- منتقل شده است، اما در حوزهٔ W صفر داریم که در حوزهٔ S صفری وجود ندارد.



مثال: اگر بخواهیم برای سیستم مثال قبل کنترل کننده‌ای طراحی کنیم که زمان نشست بهتر از ۰٫۲s و (۵٪ PO) و خطای ماندگار بهتر از ۲٪ باشد آن را طراحی کنید؛ $\omega_d \simeq 5$

$$t_s=\frac{4}{\sigma}=0.2 \longrightarrow \sigma\simeq 20 \longrightarrow \omega_d=5 \longrightarrow \omega_n=20\sqrt{2}$$

$$\zeta=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad f_s=\frac{5\omega_n}{2\pi}\longrightarrow f_s=22.5\,Hz \longrightarrow t_s=0.044^{s}$$

$$\mathcal{Z}\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{10}{s+10}\right)\longrightarrow \frac{0.3585}{z-0.6415}\ ;\quad z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}\longrightarrow G(w)=9.8377\,\frac{1-0.0222\,w}{w+9.8377}$$

* برای تثبیت پهنای باند در سیستم تبدیل یافته $\quad k=\frac{1}{0.2612}\qquad G(j\omega)=\frac{10}{20\sqrt{2}+10}=0.2612\quad$ مجهول $\measuredangle G(j\omega)=PM$

$$\nu=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}\longrightarrow \nu=32.7^{\circ}$$

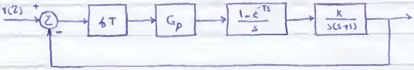
← برای بهره فرکانس $\nu=32.7^{\circ}$ بدست می‌آید $\frac{1}{k}=2.8$ برای جبرانساز (Lead) در این شرایط $(PM=70^{\circ})$ است که برای رسیدن به $PM=80^{\circ}$ $(\varphi_m=10^{\circ})$ داریم:

$$\alpha=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}\longrightarrow \alpha=1.42\ ;\quad \nu_m=45\longrightarrow T=\frac{1}{\nu_m\sqrt{\alpha}}\simeq 0.0186 \qquad \omega'_c=70\alpha$$

$$j\nu\longrightarrow G(w)=\frac{1+\alpha Tw}{1+Tw}\longrightarrow\frac{1+0.0376\,w}{1+0.0256\,w}\longrightarrow G(z)=\frac{2.6937\,z-0.6937}{2.1937\,z-0.1937}$$

نکته: شیب $20\,{}^{db}/_{dec}$ یعنی هرچه فرکانس تغییر کند به همان مقدار بهره نیز تغییر می‌کند.

مثال: در سیستم ذیل $(T=0.2s)$ در نظر گرفته شده است، کنترل کننده‌ای طراحی کنید که حد فاز را بیشتر از 54° و حد بهره را 10db و ثابت خطای سرعت را نیز $(K_v \geq 2s)$ در نظر بگیرید.



$$* \ G(z)=\mathcal{Z}\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{k}{s(s+1)}\right)\longrightarrow (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left(\frac{k}{s^2(s+1)}\right)\longrightarrow 0.01873\,\frac{k(z+0.9356)}{(z-1)(z-0.8187)}\longrightarrow$$

$$z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}\longrightarrow\frac{1+0.1w}{1-0.1w}\ ;\quad G(w)=0.003314\,\frac{k(300.4+w)(1-0.1w)}{w(0.997+w)}\longrightarrow \frac{k\left(\frac{w}{300.4}+1\right)\left(1-\frac{w}{10}\right)}{w\left(\frac{w}{0.997}+1\right)}$$

* اگر $\quad G_p(w)=\dfrac{1+{}^{w}/_{\alpha}}{1-{}^{w}/_{\beta}}$

$$* \ G_p(w)\,G(w)=\frac{1+{}^{w}/_{\alpha}}{1-{}^{w}/_{\beta}}\ \frac{k\left(\frac{w}{300.4}+1\right)\left(1-\frac{w}{10}\right)}{w\left(\frac{w}{0.997}+1\right)}$$

چون

$$k_v=\lim_{w\to 0} w\,G_p(w)\,G(w)\longrightarrow k=2$$

$PM = -162 + 180 = 18^\circ$ * از روی تابع انتقال نقطه بهره واحد :

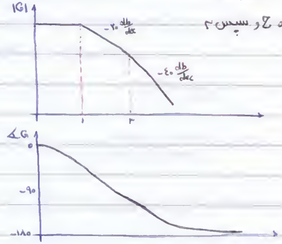
$\varphi_M = 50 - 18 = 32^\circ$ (درفرکانس ۲)

$$G_p(w) = \frac{1 + \frac{w}{0.997}}{1 + \frac{w}{3.27}} \longrightarrow G_p(z) = 2.718\,\frac{z - 0.8187}{z - 0.5071}$$

مثال: برای تابع انتقال داده شده یک طراحی انجام دهید.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \qquad t_s = 2^s \longrightarrow \sigma = 2 \quad ; \quad P.O = \%50 \longrightarrow \omega_d = \sigma$$

$(e_{ss} \leq \%2)$; $\omega_n = \frac{\sigma}{\zeta} \simeq 2\sqrt{2}\ Hz$



« البته این برای نمونه در حوزه S است که باید حتماً اول به حوزه Z و سپس به حوزه W رفته و مراحل را انجام دهیم »

$$G(j2\sqrt{2}) = \frac{1}{(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}+3)} \simeq 0.0808$$

$$K = \frac{1}{0.0808} \simeq 12.37$$

$$\measuredangle G(j\omega) = 0 - \tan^{-1} 2\sqrt{2} - \tan^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3} + 180 \simeq 66^\circ$$

(مطلوب) $\varphi_m \longrightarrow 70 - 66 \simeq 4$ $\qquad \omega_m = \omega_n \cdot \varphi_m$

$$\alpha = \frac{1 + \sin 4^\circ}{1 - \sin 4^\circ} \longrightarrow \omega_m = 1.15 \times 2\sqrt{2} \longrightarrow T = \frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}} \simeq 0.2866$$

$$G_{Lead} = \frac{1 + \alpha T s}{1 + T s} \longrightarrow G_{Lead} = \frac{1 + 0.325 s}{1 + 0.2866 s} \quad ; \quad e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \simeq \frac{1}{1 + 4.1} \longrightarrow e_{ss} \simeq \%19.6$$

(مورد نیاز) $G = \frac{49}{4.1} \simeq 12$ $\qquad G_{lag} = \frac{s + \beta}{s + \gamma} \longrightarrow \beta = \frac{1}{0.32} \times 0.1 \simeq 0.3125$; $\gamma \simeq \frac{0.3125}{12} \simeq 0.026$

نکته: درصورتی که (K) افزایش یابد باعث افزایش همه مقادیر می شود، درصورتی که لگان داریم باعث افزایش پهنای باند و افزایش سرعت شود که اساساً نیاز نیست و در بعضی موارد نیز مضر است.

خلاصه:
- سرعت ← پهنای باند ← K
- حالت گذرا ← جهش ← Lead
- خطای حالت دائم ← Lag

* کنترل دیجیتال با استفاده از (MATLAB):

۱) با استفاده از دستور (SISO tool) می‌توان نمودار و سیستم کنترل خطی و غیرخطی تک ورودی و تک خروجی را نمایش داد.

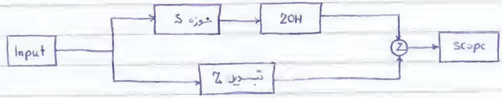
۲) در قسمت (Control Architecture) انواع مختلف نمونه طراحی اولیه وجود دارد.

۳) در قسمت (System Data) می‌توان برنامه‌ها و تابع تبدیل‌هایی که قبلاً طراحی شده و در (workspace) وجود دارد را در این قسمت قرار داد.

۴) در قسمت (Compensator Editor) می‌توان بهره سیستم را مشخص کرد.

نکته: برای قرار دادن صفر و قطب برای پهنای باند مشخص کافیست که صفر را قبل از پهنای باند و قطب را بعد از پهنای باند قرار دهیم.

نکته: بهتر است در پروژه‌های ارائه شده هر دو حالت حوزه (S و Z) باهم مقایسه شوند چرا که در این صورت صحت عملکرد مشهود است.



نکته: در سیستم‌های گسسته فرکانس تنها تا ($\frac{\omega_s}{2}$) موجود است و از آن به بعد مقدار صفر است. و دستور (c2d) تبدیل پیوسته به گسسته است.